

IV ЛИПАНОВСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

**Материалы региональной школы-семинара
молодых ученых, аспирантов и студентов,
посвященной 90-летию академика А. М. Липанова
и 50-летию кафедры «Прикладная математика» –
«Прикладная математика и информационные технологии»**

(Ижевск, 16–17 июня 2025 г.)

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова»
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Удмуртский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук»

«IV ЛИПАНОВСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ»

Материалы региональной школы-семинара
молодых ученых, аспирантов и студентов,
посвященной 90-летию академика А. М. Липанова
и 50-летию кафедры «Прикладная математика» –
«Прикладная математика и информационные технологии»

(Ижевск, 16–17 июня 2025 г.)



Издательство УИР ИжГТУ
имени М. Т. Калашникова
Ижевск 2025

УДК 001.89:378+531/534:519.6+519.711.3(06)

Л61

Ответственные редакторы:

И. Г. Русяк, зав. каф. ПМиИТ ИжГТУ имени М. Т. Калашникова,
академик РАН, д-р техн. наук, проф.;

С. А. Королев, проф. каф. ПМиИТ ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, д-р техн. наук, доц.

Оргкомитет школы-семинара

А. М. Липанов – председатель оргкомитета, д-р техн. наук, проф., академик РАН, академик РАН, главный научный сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша, проф. ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;

А. Н. Копысов, зам. председателя, канд. техн. наук, доц., проректор по научной и инновационной деятельности ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;

В. Б. Дементьев, д-р техн. наук, проф., член-корреспондент РАН, руководитель Института механики УдмФИЦ УрО РАН;

В. В. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., декан ф-та математики и естественных наук ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;

И. Г. Русяк, д-р техн. наук, проф., академик РАН, зав. кафедрой ПМиИТ ИжГТУ имени М. Т. Калашникова;

С. А. Королев, секретарь конференции, д-р техн. наук, проф. кафедры ПМиИТ

Программный комитет

А. А. Айзикович, *К. И. Дизендорф*, *А. И. Карпов*, *К. В. Кетова*, *М. А. Корепанов*, *Н. П. Кузнецов*, *М. А. Плетнев*, *С. Г. Селетков*, *В. Г. Суфиянов*, *В. А. Тенев*, *А. Ю. Федотов*, *Ю. А. Шихов*

«IV Липановские научные чтения» : материалы региональной школы-семинара молодых ученых, аспирантов и студентов, посвященной 90-летию академика *А. М. Липанова* и 50-летию кафедры «Прикладная математика» – «Прикладная математика и информационные технологии» (Ижевск, 16–17 июня 2025 г.). – Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2025. – 319 с. – 20,34 МБ (PDF). – Текст : электронный.

ISBN 978-5-7526-1090-5

В сборнике представлены материалы докладов, включенных в программу IV Региональной школы-семинара молодых ученых, аспирантов и студентов, посвященной 90-летию академика *А. М. Липанова* и 50-летию кафедры «Прикладная математика» – «Прикладная математика и информационные технологии». Тематика докладов охватывает широкий спектр проблем научных исследований, проводимых в рамках научной школы, созданной академиком РАН и РАН *Алексеем Матвеевичем Липановым* в ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, а также другие смежные вопросы математического моделирования.

Сборник опубликован в рамках субсидии из федерального бюджета образовательным организациям высшего образования на реализацию мероприятий, направленных на поддержку студенческих научных сообществ (субсидия № 075-15-2025-430 от 22 мая 2025 г.).

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов.

УДК 001.89:378+531/534:519.6+519.711.3(06)

ISBN 978-5-7526-1090-5

© ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2025

© Оформление. Издательство УИР ИжГТУ
имени М. Т. Калашникова, 2025

Академик Алексей Матвеевич Липанов



Алексей Матвеевич Липанов – выдающийся ученый и организатор науки, академик РАН, академик РАН, лауреат Государственной премии СССР и премии Правительства Российской Федерации в области науки и техники, получивший признание в широких кругах отечественной и зарубежной научной общественности за крупный вклад в развитие исследований внутрикамерных процессов в установках на твердом топливе, теории гидромеханики турбулентных процессов, физики твердого тела и механики вязких ньютоновских и неньютоновских жидкостей. Он является основоположником современной внутренней баллистики систем на твердом топливе, одним из создателей отечественных межконтинентальных твердотопливных ракет наземного и морского базирования. А. М. Липанов – автор более 800 научных работ, 17 монографий и учебников, 65 изобретений и патентов, им подготовлено более 80 докторов и кандидатов наук.

Окончив в 1959 году с отличием Томский университет по специальности «баллистика» с квалификацией «математик-механик», был распределен в НИИ-125 – Научно-исследовательский химико-технологический институт (г. Дзержинский, Московской обл.), ныне ФГУП «Федеральный центр двойных технологий “Союз”», где работал вначале инженером, затем начальником отдела и начальником вычислительного центра.

В 1965 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук, в 1970 году защитил докторскую диссертацию, посвященную решению проблемы обоснования моделирования процессов внутренней баллистики РДТТ на основе газодинамического подхода с учетом случайных полей скорости горения заряда по его объему. В 1975 ему присвоено ученое звание «профессор» по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы».

С 1975 по 1983 год – ректор Ижевского механического института, ныне ФГБОУ ВО ИжГТУ имени М. Т. Калашникова.

В 1983 году А. М. Липанов назначают заместителем министра высшего и среднего специального образования РСФСР по науке.

В 1987 году его избрали членом-корреспондентом АН СССР.

В 1988 году по поручению академика АН СССР Г. А. Месяца он приехал в Ижевск в качестве уполномоченного по созданию Удмуртского научного центра УрО АН СССР. В марте 1991 году под его руководством был создан Институт прикладной механики УрО АН СССР, а декабре 1991 года – Удмуртский научный центр УрО АН СССР, где он был руководителем вплоть до 2013 года.

За цикл работ в области исследования турбулентных потоков теоретическими средствами (прямое численное моделирование уравнений Навье – Стокса, с использованием высокоточных разностных методов) А. М. Липанов в 2000 году был удостоен звания академика РАН.

С 2013 года работает главным научным сотрудником Института прикладной математики РАН имени М. В. Келдыша (г. Москва) и по совместительству профессором ИжГТУ имени М. Т. Калашникова.

История кафедры «Прикладная математика» – «Прикладная математика и информационные технологии»



Фото 1. Первый состав кафедры ПМ.

Сидят: А. Л. Тептин, Р. Ш. Мукаева, Н. И. Калядин, Р. И. Привалова, И. А. Шпилькин;
стоят: Б. В. Нагаев, Ю. В. Комленко, Т. А. Халтурина, В. Я. Дерр, Л. С. Тихомирова,
В. П. Широковский, В. М. Вержбицкий



Фото 2. Преподаватели и сотрудники кафедры «ММПТ», 1992 год.

Сидят: Т. П. Вахрушева, Т. И. Серазетдинова, Т. В. Горохова, И. Г. Русяк, Т. М. Сидорик, С. В. Кашапова,
Л. В. Семкина; стоят: М. М. Горохов, В. А. Тенев, С. Ю. Комаров, С. Ю. Кисарова, С. Ю. Чернышев,
З. С. Мустакимова, М. С. Кузьмин, В. С. Михалкин, М. В. Шастин



Фото 3. Преподаватели и сотрудники кафедры «ПМиИТ», 2020 год.

Первый ряд: проф. В. Г. Суфиянов, доц. А. Г. Ицков, доц. А. А. Айзикович, проф. И. Г. Русяк, проф. К. В. Кетова, уч. мастер Г. Н. Владимирова;
 второй ряд: доц. Д. Г. Нефедов, доц. М. Ю. Ватолкин, ст. преп. Н. А. Рычина, ст. преп. В. В. Петрова, доц. Т. Г. Возмищева, доц. Е. Н. Баженова, ст. преп. Е. Ю. Васильева, ст. преп. М. С. Кузьмин, ст. преп. А. В. Корепанова;
 третий ряд: ст. преп. Д. А. Клюкин, доц. Д. Д. Вавилова, доц. Т. С. Быкова, ст. преп. Ю. В. Шибанова, ст. преп. П. С. Шевнина, доц. К. И. Дизендорф, доц. Е. В. Касаткина, инж. Р. Р. Дряхлов, доц. С. А. Королев

История кафедры ПМ – ПМиИ

В 1975 году на основании Приказа Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР за № 316 от 12.06.1975 г. ректором Ижевского механического института А. М. Липановым издан Приказ № 1127 от 31.12.1975 о создании на приборостроительном факультете профилирующей кафедры прикладной математики (ПМ) для подготовки инженеров-математиков. Исполняющим обязанности заведующего кафедрой прикладной математики назначен канд. техн. наук, доц. кафедры вычислительной техники Н. И. Калядин.

В 1987 году ректором Ижевского механического института О. И. Шавриным подписан Приказ № 9 от 03.09.1987 «Об открытии новой специальности «Прикладная математика»» и о начале приема 25 студентов на данную специальность по дневной форме обучения. Над открытием новой специальности в вузе и подготовкой учебного плана работали зав. кафедрой прикладной математики канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. В. Комленко и декан факультета технической кибернетики и информатики канд. техн. наук, доц. Ю. А. Каюров.

В связи с увеличением объема учебной нагрузки по специальности «Прикладная математика», повышением требований к качеству математической подготовки, а также более эффективным использованием имеющегося в институте учебного и научного кадрового потенциала на основании решения ученого совета института от 04.07.1989 ректором И. В. Абрамовым подписан Приказ № 13 от 01.09.1989 «О создании профилирующей кафедры «Математическая

кибернетика». Исполнение обязанностей заведующего данной кафедрой были возложены на канд. техн. наук, доц. Н. И. Калядина. Кафедра «Математическая кибернетика» входила в состав приборостроительного факультета. Впоследствии на базе кафедры появился учебно-научный комплекс «Кибернетика», руководителем которого на общественных началах был назначен канд. техн. наук, доц. Н. И. Калядин.

С целью улучшения математической подготовки студентов специальностей приборостроительного факультета и в соответствии с Решением Совета ИМИ от 16.11.1992 вышел Приказ ректора института И. В. Абрамова № 4 от 04.01.1993 о присвоении кафедре наименования «Прикладная математика и информатика» (ПМиИ) в соответствии с названием направления специальности. Кафедра ПМиИ организационно подчинялась приборостроительному факультету. Приказом № 503 от 22.09.1995 первым проректором Ю. М. Мерзляковым было разрешено присваивать выпускникам специальности «Прикладная математика» квалификацию «инженер-математик-программист».

С 2005 года специальности «Прикладная математика» присвоен код 230401; она отнесена к группе специальностей «Информатика и вычислительная техника». Кафедра ПМиИ осуществляла подготовку по двум специализациям: «Информационные технологии» и «Численные методы». С 2011 года в связи с переходом на двухуровневую систему высшего образования, взамен специалитета введено направление бакалавриата 01.03.04 «Прикладная математика».

За 45-летнюю историю кафедры ПМиИ ее возглавляли 5 заведующих.

1975–1984 годы – кандидат технических наук, доцент Николай Иванович Калядин. В настоящее время Николай Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, почетный профессор ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, член многих общественных российских и международных академий.

1984–1985 годы – кандидат физико-математических наук, доцент Валентин Михайлович Вержбицкий.

1985–1989 годы – кандидат физико-математических наук, доцент Юрий Васильевич Комленко.

1991–1996 годы – доктор физико-математических наук, профессор Василий Яковлевич Дерр.

1996–2020 годы – кандидат физико-математических наук, доцент Александр Аркадьевич Айзикович.

История кафедры ММПТ – МОИС

В 1989 году Приказом ректора ИжГТУ И. В. Абрамова № 14 от 15.09.1989 с целью повышения роли математического образования на машиностроительном факультете ИжГТУ была создана кафедра «Математическое моделирование процессов и технологий» (ММПТ), заведование которой принял д-р техн. наук, проф. Иван Григорьевич Русяк.

На основании Приказа ректора ИжГТУ И. В. Абрамова № 16 от 08.04.1992 с целью подготовки кадров для наукоемких отраслей народного хозяйства Удмуртской Республики была открыта специальность 010200 «Прикладная математика» со специализацией «Математическое моделирование технических и социально-экономических систем».

В дальнейшем в 1994 году в целях наиболее эффективного решения задач экономического и социального развития Ижевского государственного технического университета, повышения качества подготовки специалистов, развития научно-исследовательской деятельности при кафедре ММПТ был создан Колледж информационных технологий (Приказ ректора ИжГТУ № 140 от 04.03.1994). Приказом № 75 от 17.02.2000 Колледж информационных технологий был реорганизован в структурное подразделение факультета «Прикладная математика» ИжГТУ – Математический компьютерный колледж.

В 2000 году Приказом ректора ИжГТУ № 51 от 17.01.2000 открыта специальность 06.18.00 «Математические методы и исследование операций в экономике». Выпускники этой специальности обладают навыками анализа и моделирования экономических процессов, программирования и оптимизации экономических систем, прогнозирования и аналитических расчетов в области управленческой деятельности.

В 2004 году при кафедре открыт диссертационный совет K212.065.02 под председательством профессора И. Г. Русяка для защиты кандидатских диссертаций по физико-математическим и техническим наукам по специальностям: 08.00.13 «Математические и инструментальные методы в экономике»; 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

В 2008 году этот совет был преобразован в докторский диссертационный совет, который проработал до 2012 года.

За 32-летнюю историю кафедры ММПТ ее возглавляло 3 заведующих.

1989–2001 годы, 2002–2005 годы – доктор технических наук, профессор Иван Григорьевич Русяк. В настоящее время Иван Григорьевич – академик РАН, почетный профессор ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, лауреат Государственной премии УР и Премии имени М. Т. Калашникова, заслуженный деятель науки УР. Награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, руководитель научной школы.

2001–2002 годы – кандидат технических наук, доцент Тамара Ивановна Серазетдинова.

2005–2014 годы – кандидат физико-математических наук, доцент Каролина Вячеславовна Кетова. В настоящее время Каролина Вячеславовна – доктор физико-математических наук, профессор, руководитель научной школы «Математическое моделирование социально-экономических систем», заслуженный работник народного образования Удмуртской Республики.

В 2014 году Приказом ректора ИжГТУ Б. Я. Якимовича № 960 от 09.06.2014 г. с целью оптимизации учебного процесса кафедра ММПТ объединена с кафедрой «Математическое обеспечение информационных систем»

(МОИС), которая была создана в 2008 году. В то время на кафедре МОИС велось обучение по следующим направлениям подготовки:

- 230401 «Прикладная математика» (специалитет);
- 27.03.03 «Системный анализ и управление» (бакалавриат);
- 01.03.04 «Прикладная математика» (бакалавриат);
- 27.04.03 «Системный анализ и управление» (магистратура);
- 01.04.04 «Прикладная математика» (магистратура).

Этим же приказом заведующим объединенной кафедрой МОИС был назначен д-р техн. наук, проф. Иван Григорьевич Русяк.

Объединенная кафедра «ПМиИТ»

В 2020 году Приказом ректора В. П. Грахова № 835 от 03.09.2020 г. с целью повышения качества подготовки кадров была образована кафедра «Прикладная математика и информационные технологии» (ПМиИТ) на основе объединения кафедр «ПМИ» и «МОИС». Заведующим объединенной кафедры «ПМиИТ» был назначен д-р техн. наук, проф. Иван Григорьевич Русяк в связи с избранием по конкурсу.

Кафедра «ПМиИТ» ведет подготовку по следующим направлениям:

- 01.03.04 «Прикладная математика», профиль «Применение математических методов и программных средств для решения инженерных и экономических задач» (бакалавриат);
- 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», профиль «Прикладной анализ данных и искусственный интеллект» (бакалавриат);
- 01.04.04 «Прикладная математика», программа «Разработка программного обеспечения и математических методов решения задач с использованием искусственного интеллекта» (магистратура);
- 09.02.07 «Информационные системы и программирование», квалификация «Информационные системы и программирование – специалист по информационным системам» (среднее профессиональное образование).

В настоящее время на кафедре «ПМиИТ» работают 2 академика, 6 докторов наук, 8 кандидатов наук, 5 старших преподавателей и 5 сотрудников учебно-вспомогательного персонала. На кафедре создана научная школа «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем».

Содержание

Пленарное заседание	13
<i>Русяк И. Г.</i> Ведущая научная школа «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем» ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. Технология математического компьютерного моделирования. Результаты, состояние и перспективы развития.....	13
<i>Липанов А. М., Карсканов С. А.</i> Прямое численное моделирование на суперкомпьютерах.....	27
<i>Селетков С. Г.</i> Пошаговый проектно-исследовательский метод	33
<i>Суфиянов В. Г., Королев С. А.</i> Опыт решения практических задач с использованием технологии нейросетевого моделирования и искусственного интеллекта	37
<i>Тененев В. А., Хворенков Д. А.</i> Численное моделирование топочного процесса в водогрейном котельном агрегате	45
Секция 1. Математическое моделирование задач механики, физики, химии	53
<i>Виноградов Ф. А., Федотов А. Ю., Северюхина О. Ю., Саломатина А. Ю.</i> Исследование механических характеристик металлокомпозитов в процессе осаждения методами математического моделирования.....	53
<i>Клюкин Д. А.</i> Определение вклада колебаний ствола в рассеивание снарядов 30-мм автоматической пушки	58
<i>Корляков С. В., Шадрин В. Ф.</i> О гравитационном взаимодействии тел....	63
<i>Липанов А. М., Дементьев В. Б., Волков К. Г.</i> Разработка математической модели термоупругопластического деформирования при высокотемпературной термомеханической обработке винтовым обжатием.....	73
<i>Майков Д. Н., Макаров С. С.</i> Методы и алгоритмы ускорения расчетов прямой и обратной задачи фильтрации при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин.....	78
<i>Саломатина А. Ю.</i> Моделирование изменения магнитных свойств тонких пленок	84
Секция 2. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов	90
<i>Алексеев В. Ю., Королев С. А.</i> Разработка алгоритма восстановления начальных условий стрельбы по участку траектории.....	90
<i>Бондарев Ф. С.</i> Решение задачи внешней баллистики с произвольными углами нутации вращающегося снаряда.....	98
<i>Валеев Т. Р., Нефедов Д. Г.</i> Оптимизация структуры и параметров нейронной сети для решения обратной задачи внешней баллистики.....	108
<i>Ефимов М. Ю., Королев С. А.</i> Разработка алгоритмов наведения и корректировки стрельбы активно-реактивным снарядом	114

<i>Мансуров Р. Р., Королев С. А.</i> Комплексное математическое моделирование и оптимизация параметров активно-реактивного снаряда.....	121
<i>Подлесных И. Р., Суфиянов В. Г.</i> Разработка интеллектуальной системы восстановления траектории движения снаряда по зафиксированному участку траектории.....	128
<i>Рылов Д. А.</i> Исследование влияния баллистических параметров и геометрической формы пороховых элементов на дальность стрельбы при заданных ограничениях	139
<i>Старков К. С., Королев С. А.</i> Разработка алгоритма построения таблиц стрельбы на основе методов решения обратных задач внешней баллистики	148
<i>Трефилов Д. А., Королев С. А.</i> Применение генетического алгоритма для решения задачи оптимального управления движением планирующего снаряда.....	154
<i>Федорычев Е. А.</i> Решение основной задачи внутренней баллистики выстрела для зерненого пороха в одномерной газодинамической постановке ..	162
Секция 3. Теория управления и математическое моделирование.....	169
<i>Ватолкин М. Ю.</i> О структуре спектра некоторых многоточечных краевых задач для уравнения второго порядка.....	169
<i>Ватолкин М. Ю.</i> Примеры на исследование структуры спектра некоторых многоточечных краевых задач для уравнения второго порядка.....	177
<i>Гарипов Д. Т., Нефедов Д. Г.</i> Моделирование и визуализация движения метаемого тела с интеллектуальной системой наведения на цель	186
<i>Дизендорф К. И.</i> Расширение возможностей при взаимодействии человека с искусственным интеллектом.....	193
<i>Ицков А. Г.</i> Оценки числа k -дольных орграфов с единичными полустепенями вершин	198
<i>Красноперов И. Н.</i> Разработка информационно-аналитической системы предобработки и сегментации временных рядов.....	201
<i>Лужбин К. Д.</i> Методы и алгоритмы извлечения полезной информации из слабоструктурированных данных с использованием искусственного интеллекта	206
<i>Львова Е. Ю., Нефедов Д. Г.</i> Создание автономной интеллектуальной системы наведения и корректировки стрельбы по данным цифровых снимков.....	214
<i>Мусина А. И.</i> Методы кластерного анализа для обработки и классификации сигналов.....	223
<i>Перескокова Е. А.</i> Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния осесимметричного твердого тела с неоднородной структурой материала.....	228
<i>Тукмачёв Н. А.</i> Разработка информационно-аналитической системы классификации временных рядов нейронными сетями глубокого обучения...	237

Секция 4. Математическое моделирование технических и социально-экономических систем	242
<i>Аймурзин Н. И.</i> Разработка интеллектуальной системы диагностики заболеваний по текстовым данным.....	242
<i>Ананикова А. Г., Дизендорф К. И.</i> Применение алгоритмов классификации для анализа текстовых сообщений.....	253
<i>Вавилова Д. Д., Зерари Р.</i> Факторы и прогноз валового регионального продукта на основе данных по Удмуртской Республике.....	260
<i>Васильева И. В., Дюндик М. Е.</i> Статистическое моделирование и прогноз уровня спортивной подготовки населения в Российской Федерации.....	267
<i>Давлетшина К. М., Кузьмин М. С., Корепанова А. В.</i> Анализ и моделирование динамики показателей рынка труда в Российской Федерации.....	273
<i>Загребина А. А., Кетова К. В.</i> Изучение трудового потенциала старшего поколения.....	279
<i>Кетова К. В., Телицина Е. Д., Васильева И. В.</i> Построение кластеров субъектов Российской Федерации по показателям смертности.....	286
<i>Кузьмин М. С., Жиделева А. А.</i> Статистическое моделирование и анализ влияния факторов на интеллектуальный уровень населения.....	293
<i>Никитина К. М.</i> О некоторых подходах математического моделирования учебного процесса.....	301
<i>Тимошкина М. А.</i> Экспертный анализ влияния качества расходных материалов на работу принтеров.....	309
Сведения об авторах	314

ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

УДК 004.94

**Ведущая научная школа «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем»
ИжГТУ имени М. Т. Калашникова.
Технология математического компьютерного моделирования.
Результаты, состояние и перспективы развития**

И. Г. Русяк

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Рассмотрены этапы развития научной школы, созданной на кафедре «Математическое моделирование процессов и технологий», под научным руководством академика РАН и РАН А. М. Липанова. Кратко дано описание технологии математического компьютерного моделирования. Проанализированы результаты исследований и разработок научной школы. Сформулированы перспективы ее развития.

Ключевые слова: научная школа, прикладная математика, математическое моделирование, технические системы, социально-экономические процессы.

Введение

Научная школа «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем» берет свое начало с 1993 года. Кадровой базой научной школы явилась специальность «Прикладная математика», студенты которой обучались на кафедре «Математическое моделирование процессов и технологий». Основателем и научным руководителем научной школы является академик Алексей Матвеевич Липанов. Руководителями научной школы являются профессор Иван Григорьевич Русяк и профессор Валентин Алексеевич Тененев. Ведущие ученые научной школы представлены на рис. 1. Научная школа является кузницей кадров, через которую прошло несколько сотен студентов, более 30 из которых впоследствии защитили кандидатские и докторские диссертации.

Научная школа на протяжении всех дней своего существования является ведущей научной школой Ижевского государственного технического универси-

тета имени М. Т. Калашникова. В настоящее время в ней работают 6 докторов наук и 7 кандидатов наук.

Технология моделирования. Цели, уровни и этапы моделирования

Для понимания связи прикладной математики с методологией математического моделирования рассмотрим несколько определений.

Прикладная математика – область математики, занимающаяся исследованием объектов, лежащих за пределами математики.

Математическое моделирование – процесс получения новых знаний об объекте из анализа данных, полученных на основе математической модели.



Основатель и научный руководитель научной школы:

Липанов Алексей Матвеевич – академик РАН и РАН, д-р техн. наук, проф.

Руководители научной школы:

Русяк Иван Григорьевич – академик РАН, д-р техн. наук, проф.,

Тененев Валентин Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, проф.



Ведущие ученые научной школы:

Кетова Каролина Вячеславовна – д-р физ.-мат. наук, проф.,

Кузнецов Николай Павлович – д-р техн. наук, проф.,

Суфиянов Вадим Гарайханович – д-р техн. наук, доц.,

Королев Станислав Анатольевич – д-р техн. наук, доц.,

Нефедов Денис Геннадьевич – канд. техн. наук, доц.



Рис. 1. Ведущие ученые научной школы

Математическая модель – совокупность математических операторов различной природы, отображающих физические законы, гипотезы и закономерности, преобразующих входные сигналы объекта моделирования в выходные с учетом ряда условий и ограничений.

Выделяют следующие цели моделирования:

- описать поведение объекта моделирования;
- понять и объяснить механизмы и причинно-следственные связи поведения объекта;
- оптимизировать поведение объекта или его свойства;
- научиться управлять объектом, определять наилучшие способы управления при заданных целях, критериях и ограничениях;

– прогнозировать будущее поведение объекта, а также прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Важно подчеркнуть, что модель \tilde{A} является моделью реального объекта A лишь относительно некоторой системы S_i характеристик (свойств), где $S_i \ll \sum_i S_i$. С другой стороны, один и тот же объект A может иметь много неэквивалентных моделей. Это связано с изучением различных свойств объекта A , т. е. с необходимостью исследования различных систем S_1, S_2, \dots его характеристик. В то же время принципиально разные модели могут появляться при изучении одной и той же системы характеристик (рис. 2).

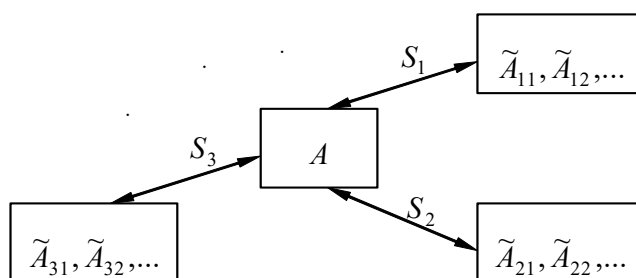


Рис. 2. Множественность моделей при моделировании

Выделяют когнитивные, содержательные, концептуальные и формальные (математические) модели (рис. 3).

– когнитивная модель – умозрительная модель, формирующаяся в голове исследователя на основе предыдущих знаний и опыта;

– содержательная модель – представление когнитивной модели на естественном языке;

– концептуальная модель – абстрактная модель, определяющая структуру моделируемой системы, свойства ее элементов и причинно-следственные связи, существенные для достижения цели моделирования;

– формальная модель – представление концептуальной модели на языке математических теорий.

Необходимое условие создания хорошей математической модели – это соединение математических и специальных знаний, а также наличие интуиции и чувства соразмерности. В свою очередь, качество реализации математической модели и представление результатов моделирования напрямую связано с уровнем подготовки в области вычислительных алгоритмов и информатики. При этом важно строить модель, прежде всего ориентированную на решение вопросов, на которые требуется дать ответ, а не пытаться моделировать реальную систему во всех подробностях, т. е. модель должна отражать только те аспекты системы, которые являются наиболее важными в данном исследовании.

А. Эйнштейну принадлежит утверждение: «Правильная постановка задачи даже более важна, чем ее решение». Смысл этого утверждения состоит

в том, что правильная постановка задачи – это часть пути, пройденного в правильном направлении, в противном случае – мы просто теряем время.



Рис. 3. Взаимоотношение моделей

Трудность этапа выбора модели обусловлена тем, что он требует соединения математических и специальных знаний. При этом следует строить модель, ориентированную на решение вопросов, на которые требуется дать ответ, а не имитировать реальную систему во всех подробностях. Закон В. Парето гласит: «В каждой группе или совокупности существует жизненно важное меньшинство и тривиальное большинство». Поэтому модель должна отображать только те аспекты системы, которые соответствуют задачам исследования.

Итак, для моделирования характерно отсечение относительно менее важных свойств оригинала; благодаря этому модель приобретает некую идеализированную форму, в ней не учитываются некоторые свойства оригинала, что должно быть оговорено в форме допущений.

Вопрос об общих методах построения моделей очень сложен и мало разработан.

Выделяют следующие этапы построения модели:

- сформулировать цель исследования;
- принять систему допущений;
- разложить задачу исследования на более простые частные случаи;
- выбрать систему обозначений;
- записать все необходимые соотношения и уравнения;
- записать начальные и граничные условия;
- проверить, совпадает ли число уравнений с числом неизвестных модели;
- проверить размерность записанных соотношений.

Последовательность и связь различных этапов математического компьютерного моделирования представлена на рис. 4.

Обсуждение вопроса о соотношении формальных и эвристических приемов в процессе построения моделей подытожим словами основоположника теории математического моделирования Р. Шэннона [1]: «Искусством моделирования могут овладеть те, кто обладает оригинальным мышлением, изобретательностью и находчивостью, глубокими знаниями систем и физических явлений, которые необходимо моделировать. Не существует твердых и эффективных правил относительно того, как надо формулировать задачу в самом начале процесса моделирования. Не существует и магических формул для решения таких вопросов, как выбор переменных и параметров, соотношений, описывающих поведение системы, и ограничений, а также критериев оценки эффективности модели. Никто не решает задачу в чистом виде, каждый оперирует с моделью, которую он построил, исходя из поставленной задачи».

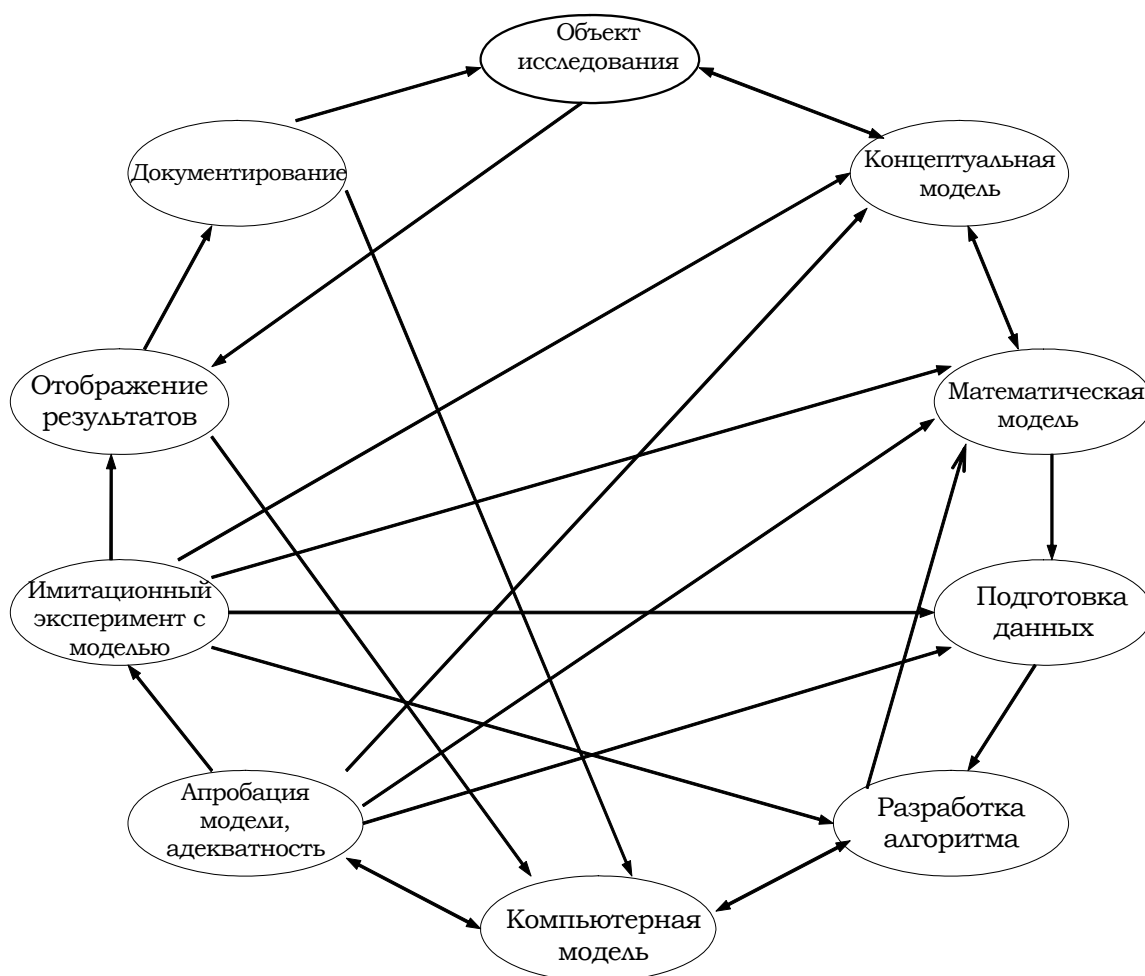


Рис. 4. Технологическая схема математического компьютерного моделирования

Итак, говоря о том, как отдельные люди осуществляют построение моделей, необходимо признать, что в этом процессе, кроме осознанных формализованных, технических и научных приемов, огромную, решающую роль играет то, что мы называем творчеством, интуитивным искусством. В этом

одна из главных причин невозможности полной формализации процесса моделирования.

Важнейшим требованием к математической модели является требование *адекватности* изучаемому реальному процессу (объекту) относительно выбранной системы S_i его характеристик. Под этим понимается правильное качественное и количественное описание объекта. Процесс установления степени адекватности модели и объекта по выбранной системе характеристик называется *апробацией*.

Важно подчеркнуть, что модель адекватная относительно одного класса воздействий может оказаться неадекватной относительно другого класса воздействий. Таким образом, адекватность моделирования определяется не только моделируемым объектом и его моделью, но также и видом рассматриваемых воздействий, выбранным классом откликов на них и принятым уровнем точности описания.

При испытаниях на адекватность используются проверки двух типов:

- *верификация* – установления того факта, что уравнения модели решены правильно (внутренний аудит модели);
- *валидация* – установление того факта, что решены правильные уравнения (внешний аудит модели).

С понятием адекватности модели тесно переплетается понятие *идентификации*. Идентификация модели – это создание непротиворечивого массива входных данных и свойств модели, обеспечивающих достоверную имитацию выбранных характеристик объекта. В принципе, чем точнее модель, тем большего массива входных данных требуется для ее реализации. Не всегда эти данные могут быть определены с достаточной точностью. Отсутствие же полной совокупности надежных входных данных увеличивает риск неадекватного априорного прогнозирования характеристик. Повышения точности моделирования, как правило, добиваются предварительной настройкой модели (за счет варьирования значениями наименее точно определяемых входных данных и связей (свойств) на те условия ее реализации, для которых имеется достоверная информация. В этой связи одной из наиболее важных процедур в имитационном моделировании является *анализ чувствительности* к входным данным (параметрам) модели. При этом достоверность многих параметров является весьма сомнительной. Поэтому если чувствительность сильная, то это может служить основанием для затраты большего количества времени и материальных средств для получения более точных оценок значений входного параметра и наоборот.

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, называется адекватной. Понятие адекватности в общем случае не совпадает с требованиями полноты, точности и правильности (истинности): адекватность означает, что эти требования выполнены не вообще (так сказать, безмерно), а лишь в той мере, которая достаточна для достижения цели.

Парадигма развития научных исследований в рамках научной школы «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-

экономических систем» кафедры «Математическое моделирование процессов и технологий» сформулирована в 1998 году: *информационные системы – информационно-аналитические системы – интеллектуальные среды – визуальные технологии – виртуальная реальность – искусственный интеллект*. Опыт прошлых лет показал, что данная парадигма оказалась верной. В этой связи попробуем спрогнозировать будущее математического компьютерного моделирования. На наш взгляд, оно будет развиваться в этой же парадигме с использованием новых составляющих, таких как:

- масштабность, основанная на использовании множества факторов и переменных различных типов;
- суперкомпьютерное моделирование;
- цифровые двойники;
- автоматизация с использованием искусственного интеллекта;
- интеллектуальные среды моделирования;
- нейросетевое моделирование на основе машинного обучения;
- виртуальная реальность;
- визуальные технологии и искусственный интеллект;
- специализированные вычислительные модули цифрового моделирования для решения различных классов задач, в частности медицина, логистика, социология, навигация, системы вооружения и т. д.

Этапы развития научной школы и направления исследований

Акценты в исследованиях научной школы на каждом этапе определялись следующими факторами:

- востребованностью;
- необходимостью воспроизводства кадров тех или иных компетенций;
- наличием финансирования.

Этап I: 1993–2010 годы.

Направления исследований:

- моделирование сопряженных задач механики сплошных сред (гидродинамика и тепло- и массообмен, нестационарное эрозионное горение топлив);
- экология воздушного и водного бассейнов (модели воздушного и водного бассейна промышленной агломерации с учетом выбросов предприятий и автомобильного транспорта, технология экологически чистой уборки снега);
- теплоснабжение и энергосбережение (тепловая защита зданий, оптимизация и надежность систем централизованного и распределенного теплоснабжения и теплопотребления, получение топлива из возобновляемых источников энергии, Центр энергосбережения ИжГТУ);
- информационные технологии в медицине (электронные медицинские карты, медицинские информационно-аналитические системы, медицинский мониторинг);
- математические и инструментальные методы в экономике (задачи диспетчеризации производства, логистики поставок, оптимального управления экономическими системами с учетом динамики человеческого капитала);

– математические и инструментальные методы в социологии (модели динамики демографических процессов, количественных и качественных характеристик человеческого капитала, стоимостных характеристик демографических потерь).

Этап 2: 2011–2024 годы.

Направления исследований:

– математическое моделирование баллистики ракетно-артиллерийского вооружения с использованием визуальных технологий виртуальной реальности (внутренняя, внешняя и конечная баллистика, моделирование полигонных испытаний, стрельба с подвижного носителя, разработка ПО виртуальной реальности);

– моделирование задач механики сплошных сред (нестационарные пространственные течения гетерогенных многофазных многокомпонентных реагирующих сред, сопряженные задачи гидродинамики, тепломассообмена и НДС, управление движением летательных аппаратов);

– обработка и анализ данных (интеллектуальные экспертные системы, нейронные сети, статистические методы обработки, совместная обработка данных различной природы (детерминированные, стохастические, ранговые, бинарные, нечеткие и пр.);

– математические и инструментальные методы в социологии (моделирование демографической динамики и динамики количественных и качественных характеристик социальных групп).

Отдельно следует выделить направление исследований в области ракетно-артиллерийского вооружения, куда следует отнести:

– исследование внутрикамерных процессов в твердотопливных ракетных двигателях и артиллерийских установках, включая течение многофазных гетерогенных реагирующих сред и напряженно-деформированное состояние элементов заряда, конструктивных элементов двигателя, снаряда и артиллерийских установок;

– исследование аэродинамики и устойчивости движения летательных аппаратов, запускаемых со стационарных установок и подвижных носителей;

– моделирование поля поражения, зон безопасности и взаимодействия снарядов с преградами;

– разработка алгоритмов управления стрельбой;

– создание автоматизированных систем обслуживания полигонных испытаний и обработки экспериментальной информации;

– разработка специализированного программного обеспечения, предназначенного для решения комплекса задач проектирования и отработки систем ракетно-артиллерийского вооружения с применением визуальных технологий;

– создание цифровых компьютерных двойников систем ракетно-артиллерийского вооружения.

Результаты исследований систем вооружения. Комплексное математическое моделирование внутренней, внешней и конечной баллистики выстрела с применением визуальных технологий проектирования и отработки систем вооружения

В данном направлении выполнен целый ряд работ [2–6]. Решена актуальная научно-техническая проблема, позволяющая повысить информативность и производительность научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ на стадии проектирования и отработки боеприпаса и артиллерийских установок за счет сквозного численного моделирования срабатывания артиллерийского выстрела, начиная с воспламенения заряда в камере и заканчивая взаимодействием снаряда с объектом поражения, применения комплексных физико-математических моделей, автоматизации представления результатов вычислительного эксперимента и разработки визуальных технологий сопровождения быстропротекающих процессов различных стадий артиллерийского выстрела. Разработан программно-вычислительный комплекс конфигурации и визуализации полигонных испытаний, позволяющий создавать новые элементы моделирования трехмерных объектов, конфигурировать карты местности, размещать элементы инфраструктуры, предназначенные для анализа, оптимизации, принятия управленческих решений на основе обработки информации по результатам моделирования процесса артиллерийского выстрела. При выполнении этих работ впервые реализован комплексный подход к математическому моделированию процесса артиллерийского выстрела, включающий внутреннюю, внешнюю и конечную баллистику, что позволило поставить и решить целый ряд новых задач. Разработана и реализована математическая модель внутрибаллистического процесса выстрела, включающая решение сопряженных задач механики гетерогенных сред, теории воспламенения и горения порохов и напряженно-деформированного состояния элементов заряда и ствола при выстреле. Разработана и реализована математическая модель движения снаряда по внешнебаллистической траектории, на основе совместного решения задачи пространственной ориентации и гидродинамического обтекания снаряда, дополненная расчетом полного набора коэффициентов аэродинамических сил и моментов. Разработана и реализована математическая модель движения снарядов и ракет при стрельбе с подвижного носителя, включающая моделирование механической и гидродинамической системы подвижного носителя. Разработана система имитационного моделирования работы измерительно-регистрирующих устройств для определения координат позиционирования и параметров функционирования измерительно-регистрирующей аппаратуры при фиксации внешнебаллистических траектории артиллерийских снарядов. Результаты проведенных исследований частично отражены на рис. 5–8.

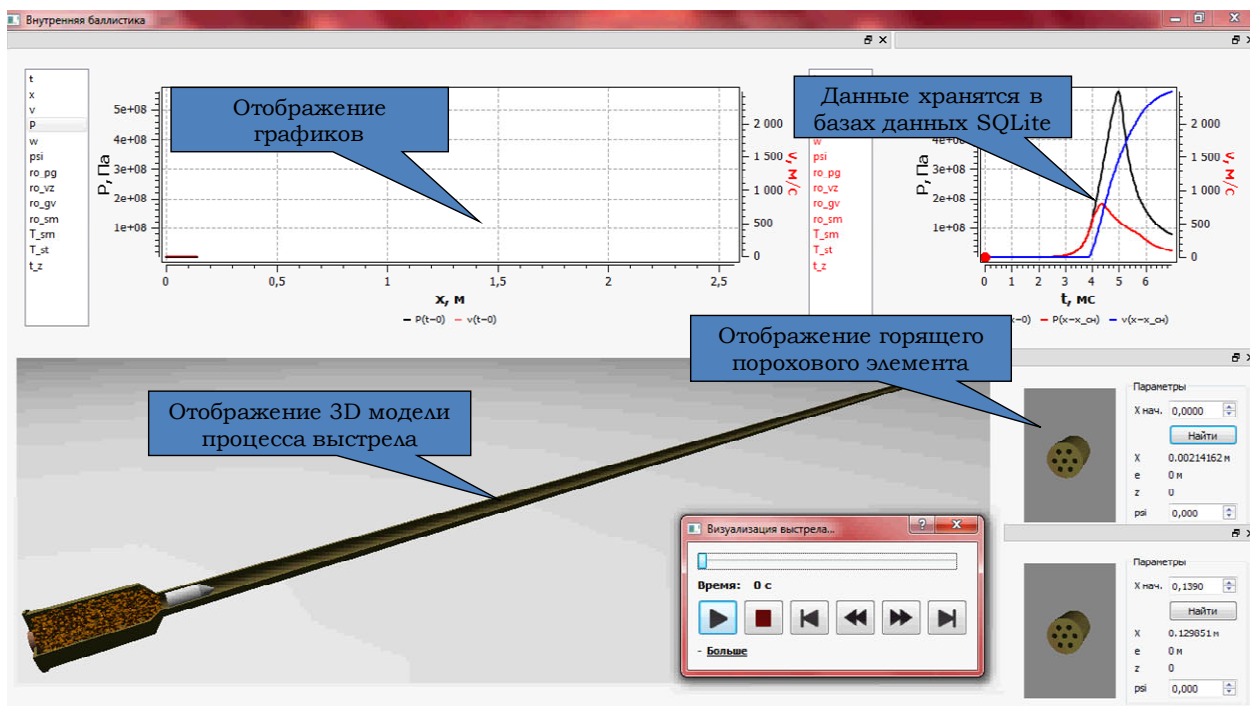


Рис. 5. Главное окно расчетного модуля внутренней баллистики

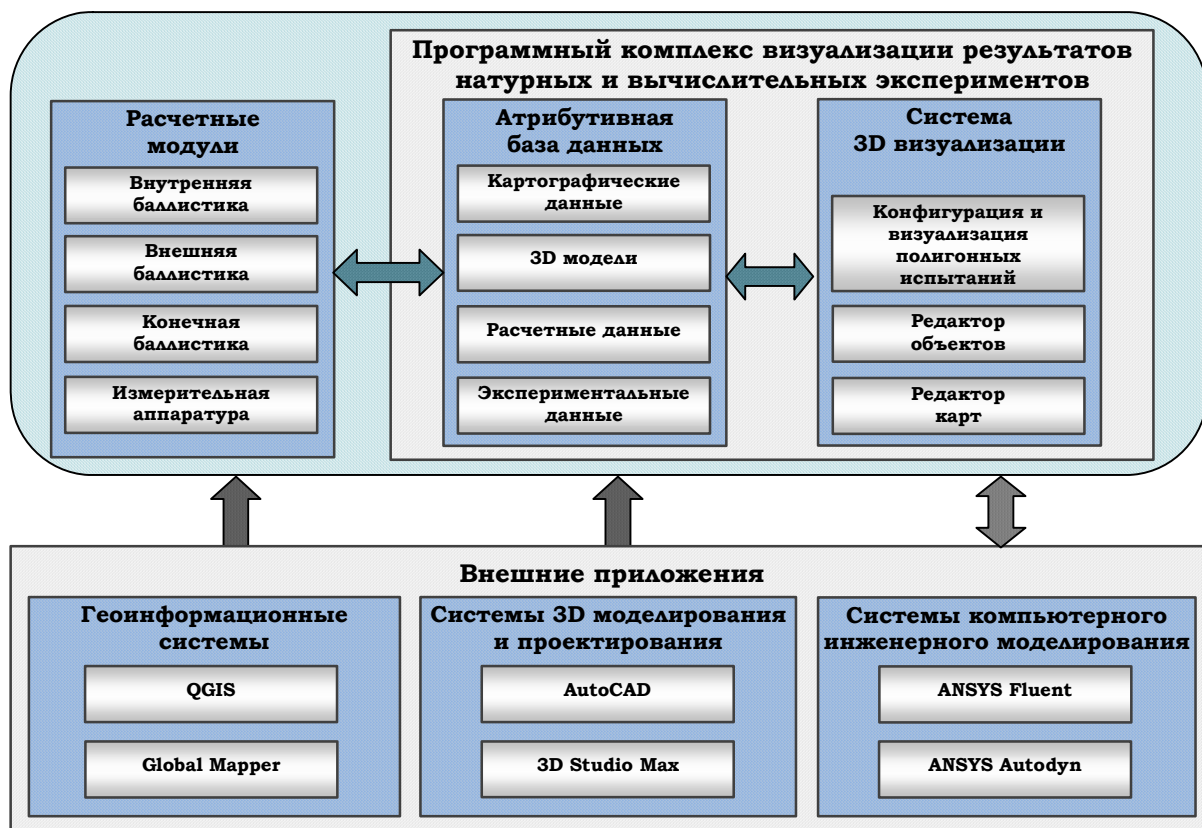


Рис. 6. Структура программного комплекса моделирования и визуализации баллистических процессов

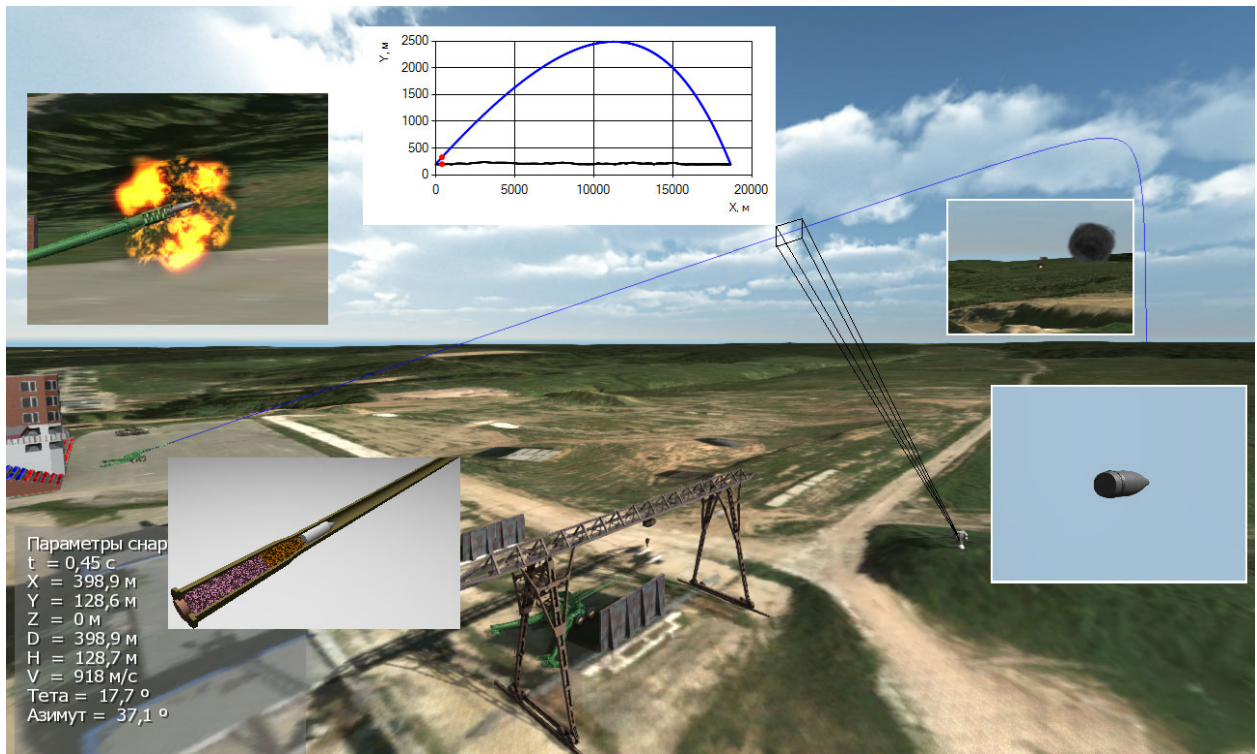


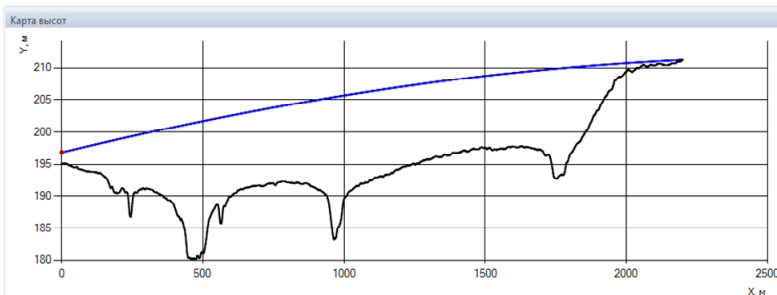
Рис. 7. Элементы моделирования и визуализации баллистических процессов и системы полигонных испытаний



а) отображение траектории движения снаряда на виртуальном полигоне



б) вид снаряда из виртуального измерительного устройства



в) траектория движения снаряда с учетом рельефа



г) виртуальная карта полигона

Рис. 8. Визуализация результатов моделирования движения снаряда в программном комплексе

Предполагаемое развитие научной школы «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем» является содержанием 3-го этапа, рассчитанного на 2025–2030 годы. Этот этап включает следующие приоритетные направления исследований:

- математическое компьютерное моделирование технических систем и систем вооружения с использованием визуальных технологий виртуальной реальности;
- математическое компьютерное моделирование социально-экономических и логистических систем;
- цифровые технологии в энергосбережении, экологии, медицине, социологии;
- прикладной анализ данных с использованием методов машинного обучения и искусственного интеллекта;
- разработка специализированных вычислительных модулей цифрового инженерного моделирования для решения различных классов прикладных задач;
- теория дифференциальных и разностных уравнений, решение некорректных и обратных задач.

Повышенное внимание на данном этапе развития планируется уделить подготовке кадров высшей квалификации. С этой целью будет создан научно-образовательного кластера научной школы, где должны гармонично сочетаться образовательные, научные программы и технологии искусственного интеллекта. Для этого на кафедре «Прикладная математика и информационные технологии» (ПМиИТ) есть необходимые условия:

- магистратура, аспирантура и докторантура;
- диссертационный совет по специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»;
- программа развития кафедры основывается на предположениях о востребованности специалистов в области прикладной математики для решения задач импортозамещения программного обеспечения и специалистов в области искусственного интеллекта и информационных технологий;
- реализовано обучение студентов по следующим направлениям подготовки: «Прикладная математика» и «Прикладная математика и информатика».

Целью образовательных программ кафедры является подготовка высококвалифицированных специалистов в области математического моделирования процессов и явлений, протекающих в технических и социально-экономических системах, обладающих широкими компетенциями разработки и использования информационных технологий, методов машинного обучения, методов обработки данных с использованием искусственного интеллекта.

В научно-образовательный кластер «*Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем с использованием искусственного интеллекта*» кафедры ПМиИТ должны войти:

– лаборатория «Математическая обработка сигналов» – разработка методов обработки и классификации геофизических данных, медицинских данных, звуковых и световых сигналов, дефектов оборудования и др.;

– лаборатория «Баллистика» – разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для решения задач внутренней, внешней и конечной баллистики;

– научно-образовательного центр «Искусственный интеллект» – разработка, использование и применение методов искусственного интеллекта для решения практических задач; курсы и семинары повышения квалификации в области искусственного интеллекта для студентов, преподавателей и т. д.

В составе научно-образовательного кластера необходимо иметь высокопроизводительную вычислительную технику для решения задач в области:

– математического компьютерного моделирования сложных объектов и систем;

– трехмерной визуализации;

– применения методов машинного обучения и интеллектуального анализа больших данных.

Научно-образовательный кластер научной школы «Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем с использованием искусственного интеллекта» представлен на рис. 9.



Рис. 9. Проект развития научной школы

Заключение

1. План развития научной школы кафедры ПМиИТ соответствует парадигме развития информационных технологий: *информационные системы – информационно-аналитические системы – интеллектуальные среды – визуальные технологии – виртуальная реальность – искусственный интеллект.*

2. Для соответствия современным тенденциям развития информационных технологий, поддержания и развития компетенций в области математического компьютерного моделирования и искусственного интеллекта на базе кафедры ПМиИТ необходимо осуществлять обучение студентов по следующим направлениям подготовки: *Прикладная математика, Прикладная математика и информатика, Информационные системы и технологии.*

3. Для реализации заявленных планов развития необходимо создать на базе кафедры ПМиИТ в ИжГТУ имени М. Т. Калашникова НОК «*Математическое компьютерное моделирование технических и социально-экономических систем с использованием искусственного интеллекта*» для выполнения фундаментальных и прикладных исследований в рамках грантов, государственных заданий, НИР и ОКР с предприятиями ВПК и реального сектора экономики, а также подготовки элитных специалистов для обслуживания наукоемких производственных технологий.

4. Магистерская диссертация может и должна стать основой кандидатской диссертации, тогда защита кандидатской диссертации становится реальной уже через год-два после окончания магистратуры.

Список литературы

1. *Шеннон, Р.* Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – Москва : Мир, 1978. – 418 с.

2. *Русяк, И. Г.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах / И. Г. Русяк, А. М. Липанов, В. М. Ушаков. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. – 436 с.

3. Разработка визуальных технологий моделирования процесса артиллерийского выстрела / А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев // Информационные технологии на службе оборонно-промышленного комплекса : материалы VI ежегодного форума, 2017. – С. 113–114.

4. Разработка специализированного вычислительного модуля для решения комплекса задач проектирования и отработки стрелково-пушечного вооружения / А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев // Супервычисления и математическое моделирование : труды XVII Международной конференции. – Саров, 2019. – С. 337–361.

5. Программный комплекс решения задач проектирования и отработки стрелково-пушечного вооружения / А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах (ICOC'2020) : сборник трудов X Всероссийской конференции. – 2020. – С. 175–188.

6. Численное моделирование артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий для проектирования и отработки артиллерийских систем / А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев, В. Н. Белобородов. – Москва ; Ижевск : ИКИ, 2023. – 416 с.

Прямое численное моделирование на суперкомпьютерах

А. М. Липанов^{1,2}, С. А. Карсканов³

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

² Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,

³ Институт механики УдмФИЦ УрО РАН

Показаны результаты теоретического решения задачи протекания воздуха сквозь прямоугольный канал с расширением и задачи торможения сверхзвукового потока в трубе на основе прямого численного моделирования путем интегрирования уравнений Навье – Стокса без привлечения дополнительных моделей и эмпирических констант. Представлены векторы скорости и теневые картины распределения плотности в зависимости от параметров течения. Показано, что современная вычислительная техника позволяет рассчитывать высокоскоростные турбулентные и закритические потоки газа.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, уравнения Навье – Стокса, высокий порядок аппроксимации, многопроцессорная система.

Введение

Численное решение гидромеханических дифференциальных уравнений с частными производными в настоящее время является единственным эффективным способом подробного теоретического исследования полей и режимов турбулентных потоков. С другой стороны, накоплен еще совершенно недостаточный опыт аккуратного и обоснованного получения результатов в процессе решения уравнений гидромеханики для турбулентного диапазона изменения гидромеханических параметров (ГМП). Результаты, опубликованные в монографии [1], можно назвать одной из первых попыток теоретического изучения закономерностей движения и структуры турбулентных потоков. Поэтому изучение физических процессов для различных условий протекания турбулентных потоков является актуальной задачей.

1. Решение задачи о протекании дозвукового потока сквозь прямоугольный канал с расширением

В прямоугольном канале с резким расширением на входе интегрируются трехмерные уравнения Навье – Стокса. Аппроксимации частных производных осуществляются с высоким порядком на основе центрально-разностных схем. Область интегрирования показана на рис. 1.

Длина канала равна 20 безразмерным единицам. Число Маха на входе в канал равно $M = 0,6$, число Рейнольдса $Re = 0,5 \cdot 10^4$, число Прандтля $Pr = 0,7$. Движущейся средой был воздух.

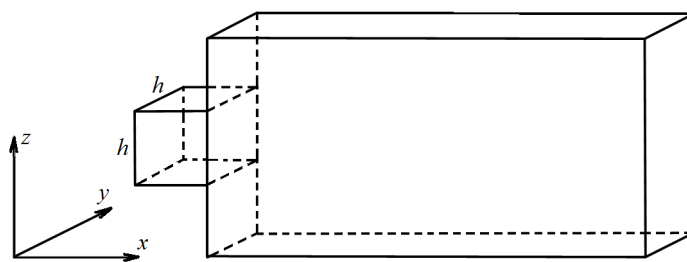


Рис. 1. Область интегрирования, прямоугольный канал

Расчеты проводились на сетках разной мощности. Число узлов используемых сеток приведено в табл. 1.

Таблица 1. Используемые сетки

№ п/п	Кол-во узлов в направлениях x, y, z	Мощность сетки (млн узлов)
1	400×45×15	0,27
2	600×63×21	0,8
3	800×93×31	2,3
4	1600×183×61	17,8
5	1920×273×91	47,7
6	2400×363×111	96,7

Общее число узловых точек разностной сетки в шестом варианте превышает их число в первом варианте почти в 350 раз.

Количество используемых процессоров и средние затраты времени на выполнение расчетов для 1000 шагов интегрирования по времени при счете на сетках с различными порядками аппроксимации приведены в табл. 2. Во всех расчетных случаях шаг по времени был одинаков и составлял 0,0015 безразмерных единиц.

Таблица 2. Время счета 1000 шагов по времени

№ п/п	Порядок аппроксимации				
	2	4	6	8	10
1	40 процессоров				
	24 сек	27 сек	42 сек	60 сек	80 сек
2	40 процессоров				
	90 сек	144 сек	150 сек	188 сек	226 сек
3	80 процессоров				
	92 сек	144 сек	156 сек	190 сек	328 сек
4	160 процессоров				
	558 сек	648 сек	984 сек	1104 сек	1272 сек
5	240 процессоров				
	1536 сек	1920 сек	2106 сек	2232 сек	2445 сек
6	400 процессоров				
	2250 сек	2640 сек	2850 сек	3000 сек	3280 сек

На рис. 2 приведены продольные сечения полей вектора скорости потока для трех вариантов сеток (первого, третьего и четвертого) при четвертом порядке аппроксимации пространственных производных. Из результатов расчетов следует, что на грубой сетке имеем только крупные вихри, течение формируется под действием схемной вязкости. Только переход к четвертой сетке формирует картину течения, близкую к реальной.

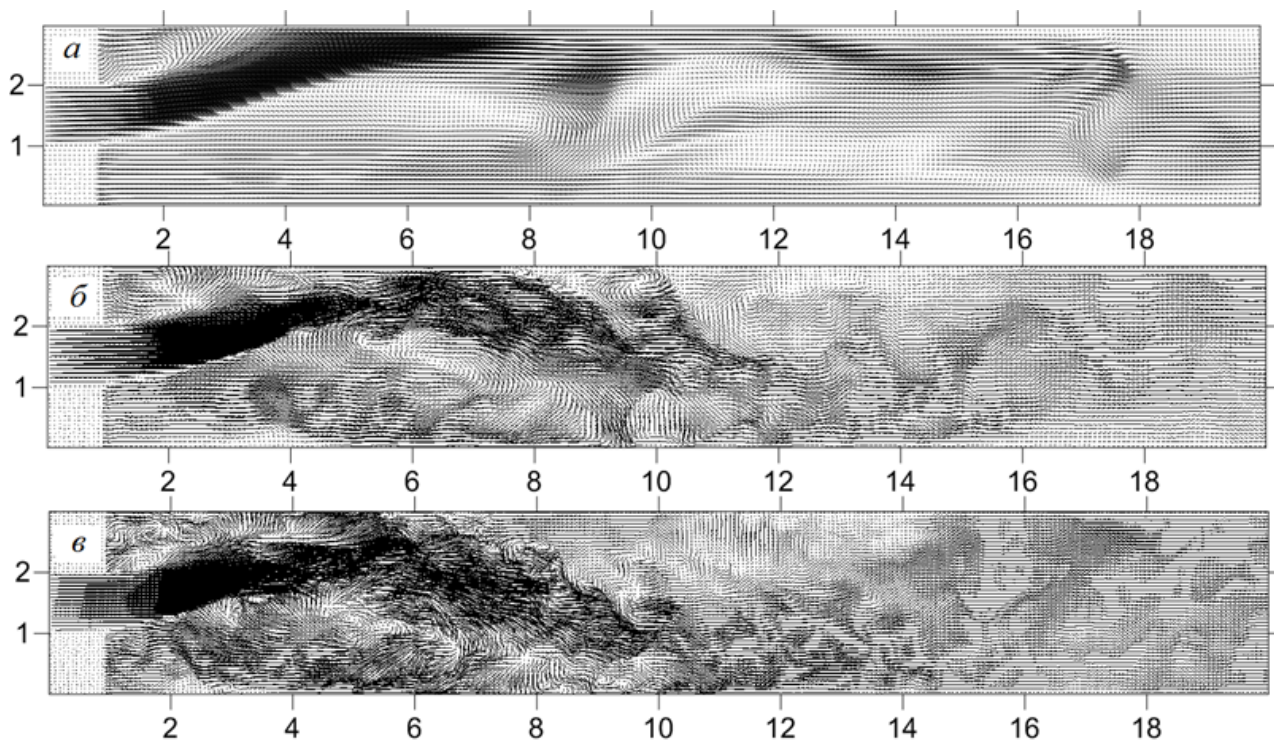


Рис. 2. Векторы скорости при расчете с четвертым порядком аппроксимации на различных сетках: *a* – сетка № 1, *б* – сетка № 3, *в* – сетка № 4

Далее рассмотрим гидромеханические процессы при сохранении шагов разностной сетки, но при различных порядках аппроксимации пространственных частных производных. Результаты показаны на рис. 3.

Исследование сходимости путем сравнения максимальной величины модуля вектора вихря показало, что для получения достоверных интегральных параметров течения как минимум необходимо использовать восьмой порядок на пятой сетке. Учитывая данные табл. 2, можно заключить, что вариант расчета течения в этом случае на суперкомпьютере займет около месяца.

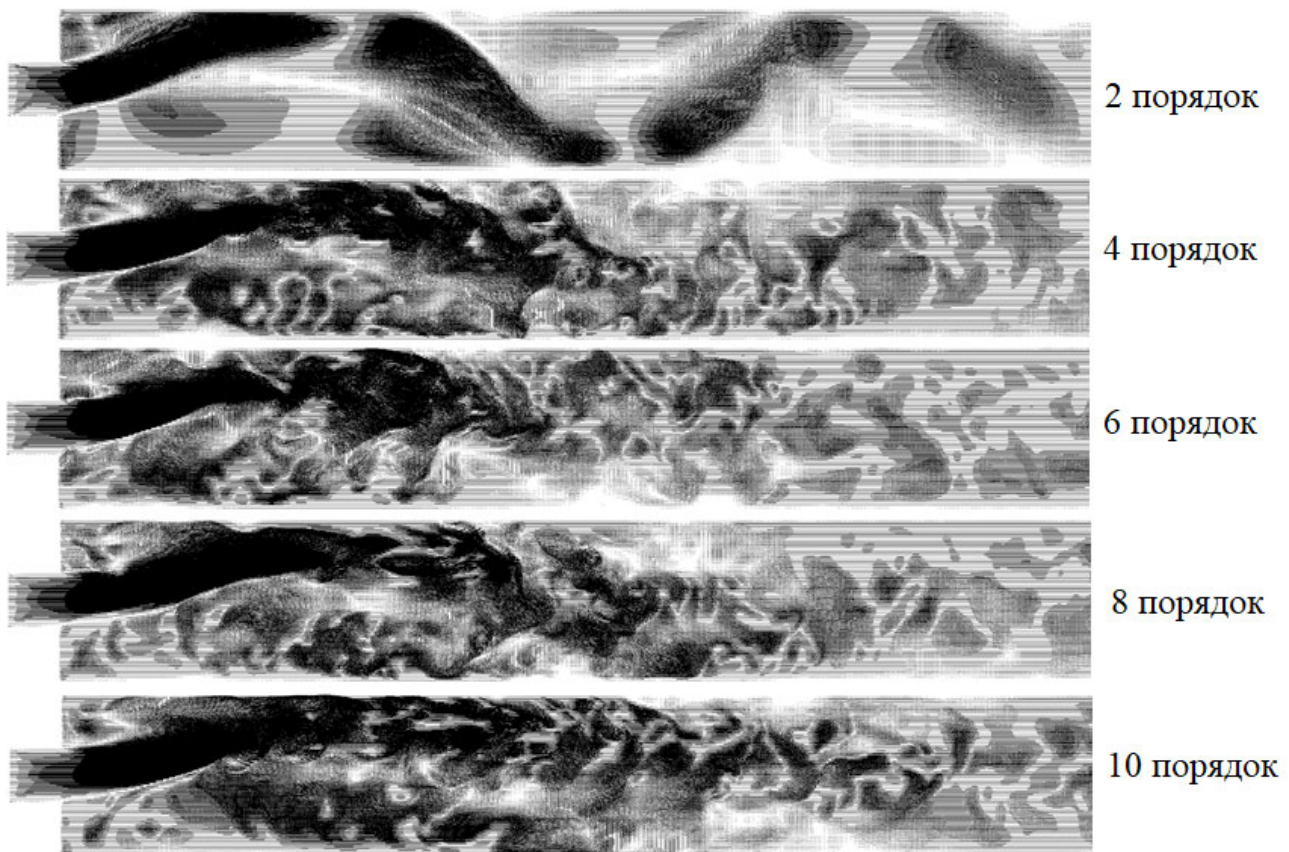


Рис. 3. Векторы скорости на сетке № 5 при расчете с различными порядками точности

2. Решение задачи о протекании сверхзвукового потока сквозь трубу

Рассмотрим задачу внутреннего торможения газа в сверхзвуковом канале. Для круглой трубы уравнения Навье – Стокса решаются в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат.

При входе в канал сверхзвукового потока на стенках образуются пограничные слои, однако резкого нарастания их толщины не происходит (в отличие от дозвукового течения). Взаимодействия между ядром потока и пограничными зонами нет. Режим течения является закритическим и имеет ромбовидную структуру с системой трансформирующихся скачков и градиентов параметров.

На рис. 4 показана теневая картина распределения плотности для потока с различными характерными числами Маха и числом Рейнольдса 10^5 . Плотность распределена в виде последовательных, несколько вытягивающихся вглубь по длине ромбов. Уменьшение числа Маха заметно уменьшает размеры ромбов из волн сжатия, из которых состоит структура течения. Увеличение же числа Маха, наоборот, приводит к вытягиванию ромбовидных структур.

Далее рассмотрим модельную задачу торможения сверхзвукового течения в трехмерном прямоугольном канале квадратного сечения. Как и в случае круглой трубы установившееся течение состоит из лямбда-образных структур.

Однако, кроме икс-образных ромбовидных структур, в прямоугольном канале образуются прямые скачки уплотнения. Это видно на рис. 5. Чем выше число Маха, тем дальше от входа находится максимальный прямой скачок параметров.

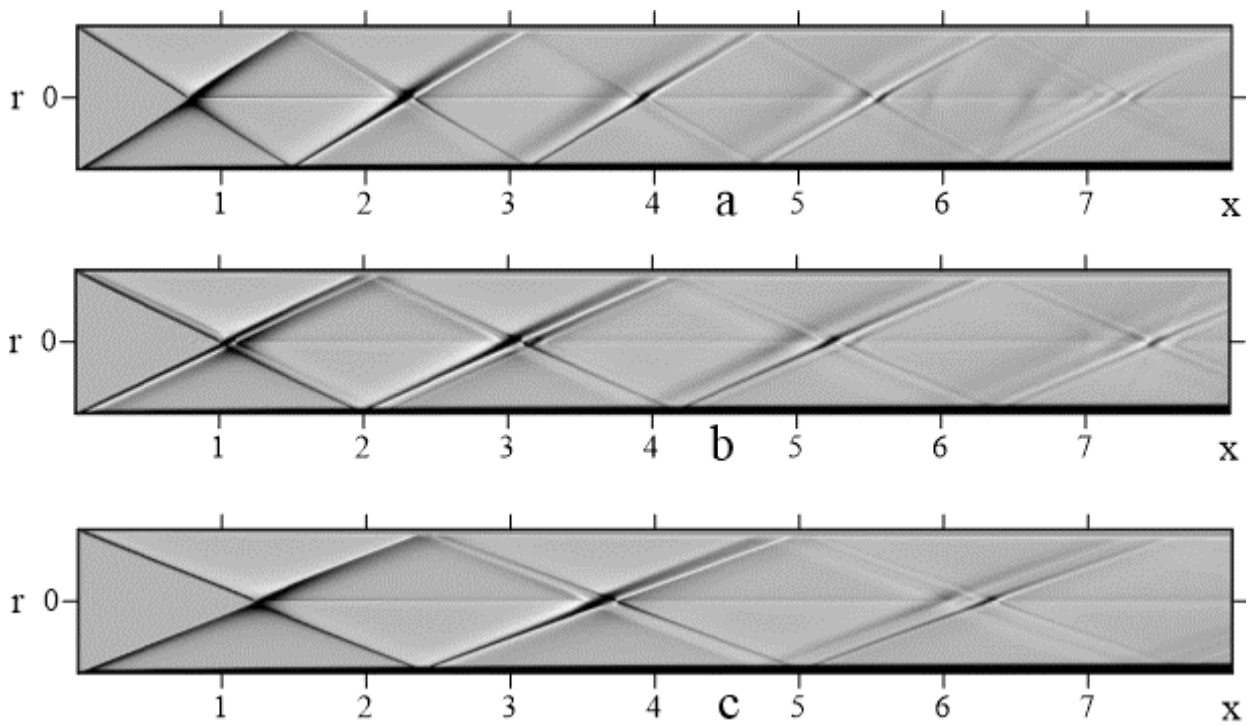


Рис. 4. Теневая картина плотности в круглой трубе: $a - M=2,0$, $b - M=2,5$, $c - M=3,0$

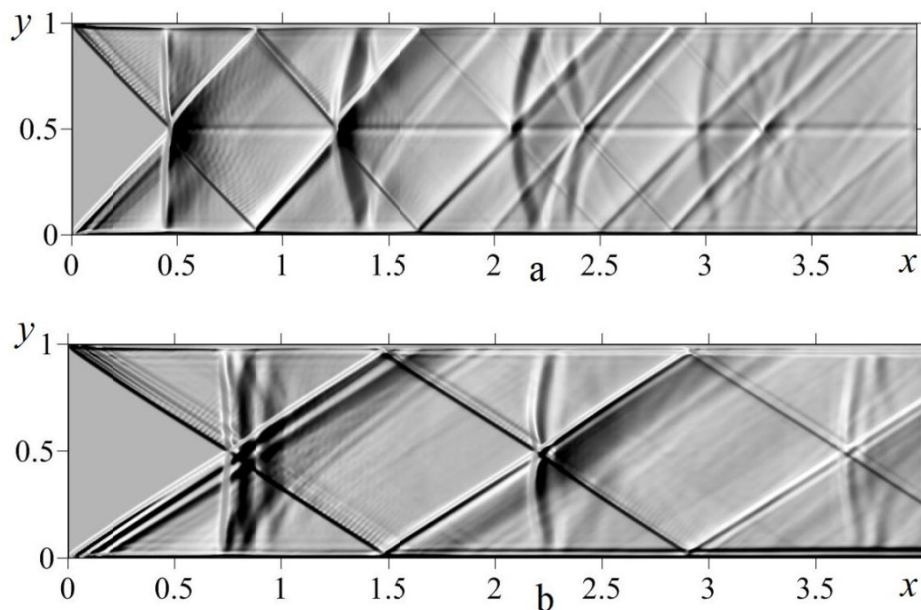


Рис. 5. Теневая картина плотности в прямоугольном канале: $a - M=1,5$, $b - M=2,0$

На рис. 6 приведена экспериментальная фотография процесса торможения сверхзвукового потока из работы [2]. Сравнение рис. 4 и 5 с рис. 6 свидетельствует о физическом подобии картин течения и обоснованности методики и алгоритмов прямого численного моделирования.

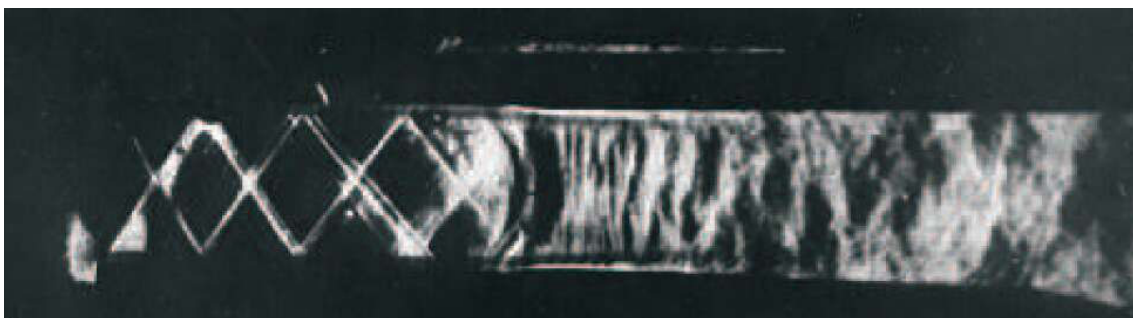


Рис. 6. Торможение сверхзвукового потока в канале при $M = 2$

Приведенные в работе результаты решения задач, полученные на основе прямого численного моделирования уравнений Навье – Стокса, показывают состоятельность метода. Современные суперкомпьютеры позволяют рассчитывать даже сверхзвуковые течения без привлечения какой-либо эмпирики. Это может быть крайне полезным инструментом для калибровки существующих моделей турбулентности.

Расчеты выполнены на суперкомпьютере «Уран» (ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург).

Список литературы

1. *Липанов, А. М.* Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. – Москва : Наука, 2011. – 551 с.
2. Газовая динамика. Сер. Аэродинамика больших скоростей / под ред. Эммонса. – Москва : Физматлит, 1957.

Пошаговый проектно-исследовательский метод

С. Г. Селетков

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Проектно-исследовательский метод можно встретить в качестве инструмента выполнения практически любой научной деятельности. В нем сочетаются, по сути, два метода: проектный и исследовательский, которые между собой имеют как схожие черты и компоненты, так и существенно расходящиеся. В настоящей статье делается предложение, позволяющее более органично выполнить соединение процессов метода проектирования и метода научного исследования. При этом предлагаемое объединение методов исследования и проектирования позволяет создать эффективный инструмент проектно-исследовательской деятельности и алгоритм его пошагового выполнения.

Ключевые слова: проектный метод, исследовательский метод, исследование, открытие.

Основные положения

Проектированием и исследованием в самом широком смысле их понимания человечество занимается с эпохи своего появления, постоянно что-то изобретая и создавая, чем на протяжении тысячелетий совершенствует и формирует процесс проектирования и параллельно постоянно делает открытия как в самом себе, так в среде своего обитания, чем совершенствует процесс исследования. Однако, можно указать на принципиальное различие процесса проектирования и процесса исследования. Проектирование призвано создавать что-то новое, т. е. изобретать ранее не существовавшего в природе объекта, в то же время основной функцией исследования является открытие уже существующего, но неизвестного знания, которое в дальнейшем может использоваться для инноваций.

Основоположником метода проектов глобальная сеть предлагает считать американского философа Джона Дьюи, предложившего использовать метод во второй половине XIX века в общеобразовательных школах США. Целью нововведения была идея сделать жизнь ребенка более содержательной и насыщенной творческим трудом. Суть метода проектов в педагогическом процессе обучения, по предложению профессора Е. С. Полат, была сформулирована как способ достижения дидактической цели через детальную разработку проблемы (технологии), которая должна завершиться реальным практическим результатом, оформленным тем или иным образом.

Сама по себе методология процесса проектирования как процесса создания чего-то нового волнует исследователей-методистов постоянно.

Если под *проектированием* понимать формирование модели образца результата, то в этой деятельности человечество накопило богатый опыт. И поскольку проектирование, сочетая в себе элементы науки и искусства [1], многообразно по формам приложения – от разрешения социальных противоречий до решения чисто технических или педагогических проблем (проектный метод), – то не удивительно, что в понимании проектной деятельности также нет однозначности.

Приведем некоторые наиболее известные определения процесса проектирования:

- «принятие решений в условиях неопределенности с тяжелыми последствиями в случае ошибки» (Morris Asimow, 1962 г.) [2];
- «разработка модели оптимального качества» (А. А. Коновалов, 1984 г.) [3];
- «процесс, кладущий начало изменению в искусственной среде» (Дж. К. Джонс (John Christopher Jones), 1986 г.) [4].

Оригинальную методологию процесса *проектирования* предложил Дж. К. Джонс (John Christopher Jones) [4]. Он разбивает проектирование на три фазы: дивергенцию – расширение границ проектной ситуации для поиска решений; трансформацию – стадию преобразования задачи проектирования, создания концептуальной схемы объекта, период догадок и озарений; конвергенцию – стадию окончательного выбора варианта технического решения.

Термин «исследовательский метод» был предложен Б. Е. Райковым в 1924 году, под которым он понимал «...метод умозаключения от конкретных фактов, самостоятельно наблюдаемых учащимися или воспроизводимых ими на опыте».

По В. А. Ядову [5], программа исследования выступает изложением его теоретико-методологических предпосылок как общей концепции в соответствии с основными целями предпринимаемой работы и гипотез исследования с указанием правил процедур и логической последовательности операций для их проверки. Заметим, что компоненты методов проектирования и исследования наиболее ярко проявляются, в частности, при подготовке и защите диссертационной работы. Содержательная часть диссертационного исследовательского содержит следующие компоненты, которые могут быть организованы в группы, соответствующие трем базовым этапам подготовки диссертации [6].

I этап. «*Проблема, задачи*», содержит компоненты:

- объект исследования;
- предмет исследования;
- наименование диссертации;
- актуальность объекта и предмета исследования;
- цель и задачи исследования.

II этап. «*Предложение, гипотеза*», содержит компоненты:

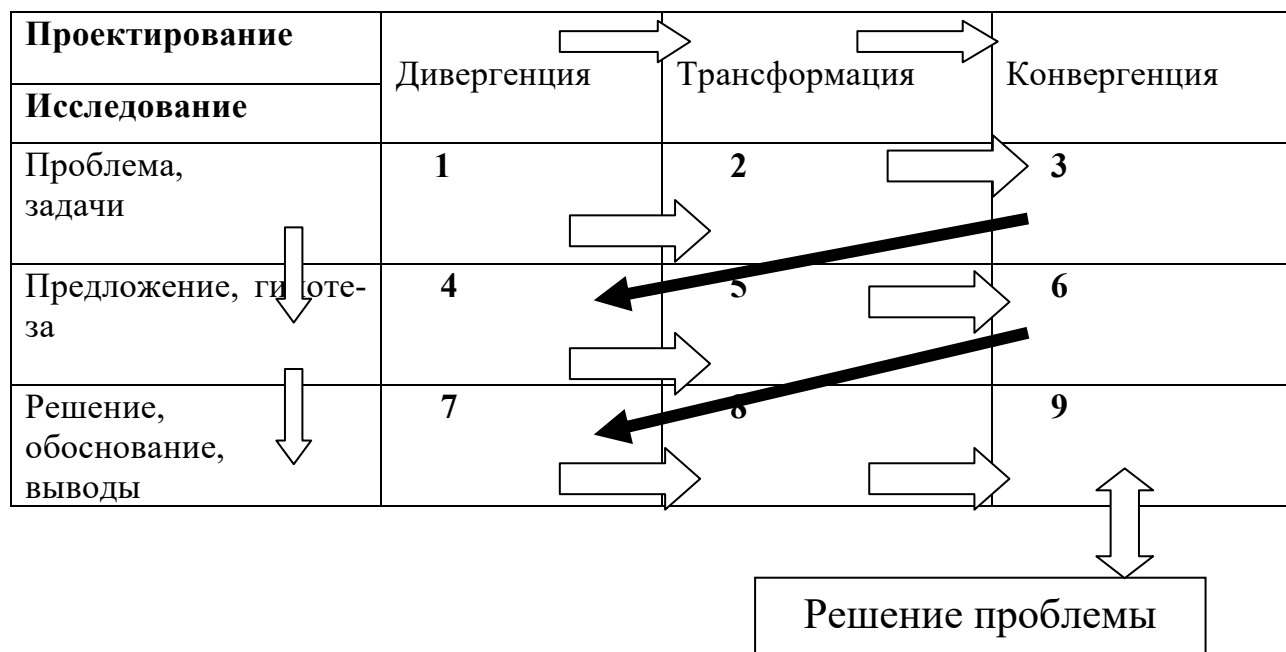
- гипотеза нового научного знания (разработки);
- методология и методы исследования;
- научные результаты (положения, выносимые на защиту).

III этап. «Решение, обоснование, выводы», включает компоненты:

- новое научное знание, представленное в научных выводах;
- обоснование и апробация;
- оценка значения для теории и практики.

Основная идея настоящей публикации состоит в объединении в морфологическую таблицу этапов проектирования, предложенных Дж. К. Джонсом, и этапов выполнения, изложенных выше, исследовательского метода на примере проведения диссертационного исследования (таблица).

Морфологическая таблица пошагового проектно-исследовательского метода



В приведенной таблице стрелками сформирован пошаговый процесс использования данного пошагового проектно-исследовательского метода (ППИМ).

На первом этапе *исследовательского* метода (проблема, задачи) формулируются перечни проблем и соответствующих задач. При этом в соответствии с первым этапом *проектного* метода – дивергенция (расширение) – предусматриваются различные вариации формулировок проблемы и задач. Таким образом, расширяется охват возможных причин возникновения проблемы. На втором этапе метода проектов (трансформация) выполняется преобразование первоначально предложенного набора формулировок проблемы и задач. Происходит переосмысление формулировок и их сокращение до наиболее приемлемых для данного конкретного случая. На этапе конвергенции (свертывания) – третьем шаге ППИМ дается окончательная формулировка проблемы и задач для ее разрешения. В целом первый этап исследовательского метода призван помочь исследователю не заикливаться на единственной, первой пришедшей в голову причине возникновения проблемы, а рассмотреть систему возможных причин, чем существенно повысит вероятность её оптимального разрешения.

Аналогичные стадии (дивергенция, трансформация, конвергенция) проходит проблема, принятая на первом этапе исследовательского метода, в рамках второго этапа исследования – предложение (гипотеза). Здесь, на четвертом шаге ППИМ, формулируются варианты предложения и гипотезы для разрешения проблемы, сформулированной на первом этапе. Предложений и гипотез на четвертом шаге пошагового проектно-исследовательского метода также должно быть несколько. На пятом шаге (трансформация предложения, гипотезы) происходит переосмысление всех выдвинутых гипотез и предложений, чем сужается их количество и подготавливается окончательный выбор формулировки гипотезы (предложения) на шестом шаге ППИМ. На завершающем третьем этапе исследовательского метода (решение, обоснование, выводы) и седьмом шаге разворачивается общая схема возможных обоснований выдвинутой гипотезы: экспериментально, теоретически, комплексно, сравнением с известными данными и другие. На восьмом шаге ППИМ мы принимаем решение о способе обоснования гипотезы и выполняем его, чем обеспечиваем выполнение завершающего девятого шага – формулирование решения поставленной на третьем шаге проектно-исследовательского метода проблемы и выдвинутым гипотезы ее разрешения на шестом шаге.

В качестве заключения можно констатировать, что изложенный в статье пошаговый проектно-исследовательский метод может эффективно использоваться при разработке технических и социальных предложений, в также в работе научных коллективов при выполнении фундаментальных и прикладных исследований во всех классах отраслей науки.

Список литературы

1. Хилл, П. Наука и искусство проектирования. Методы проектирования и научное обоснование решений / пер. с англ. Е. Г. Коваленко ; под ред. В. Ф. Венды. – Москва : Мир, 1973. – 264 с. – URL: <http://depositfiles.com/ru/files/1yvcjbkju> (дата обращения: 06.07.2011).
2. Asimow, M. Introduction to Design. – Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, 1962. – 135 pp.
3. Коновалов, А. А. Системное проектирование автоматического оружия : курс лекций. – Ижевск : Изд-во ИМИ, 1984. – 270 с.
4. Джонс, Дж. К. Методы проектирования / пер. с англ. Т. П. Бурмистровой, И. В. Фриденберга ; под ред. В. Ф. Венды, В. М. Мунипова. – 2-е изд., доп. – Москва : Мир, 1986. – 326 с.
5. Ядов, В. А. Стратегия социологического исследования: описание, объяснение, понимание социальной реальности : учеб. пособие для вузов по спец. «Социология». – 3-е изд., испр. – Москва : Омега-Л, 2007. – 567 с. – (Университетский учебник).
6. Селетков, С. Г. Методология диссертационного исследования : учебник для вузов / С. Г. Селетков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2025. – 281 с. – (Высшее образование).

Опыт решения практических задач с использованием технологии нейросетевого моделирования и искусственного интеллекта

В. Г. Суфиянов, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В статье представлен обзор практических задач, решенных за последние пять лет на кафедре прикладной математики и информационных технологий ИжГТУ имени М. Т. Калашникова с использованием методов искусственного интеллекта, в частности нейронных сетей глубокого обучения. Рассмотрены результаты решения следующих задач: обработка медицинских анамнезов; использование элементов искусственного интеллекта в метрологическом обеспечении полигонных испытаний; обработка и классификация сигналов с использованием нейронных сетей; восстановление траектории движения снаряда и точки стрельбы по зафиксированному участку траектории.

Ключевые слова: искусственный интеллект, нейронные сети, прикладные задачи, обработка текста, обработка сигналов.

На кафедре «Прикладная математика и информационные технологии» – «Прикладная математика» за 50 лет развития решались различные научные и практические задачи. Одним из направлений исследования является обработка и анализ данных, распознавание образов, разработка статистических моделей различных явлений и процессов. Работы преподавателей кафедры (А. Г. Ицкова, К. И. Дизендорфа, В. Г. Суфиянова, К. В. Кетовой, Д. Д. Вавиловой и др.) в этом направлении в основном связаны с распознаванием образов, анализом сигналов и медицинских данных, обработкой археологических данных, исследованием динамики социально-демографических процессов.

Дальнейшее развитие этого направления связано с широким распространением современных интеллектуальных технологий обработки данных, развитием технологий нейронных сетей глубокого обучения и больших языковых моделей.

Рассмотрим развиваемые на кафедре основные направления решения практических задач с использованием технологий нейросетевого моделирования и искусственного интеллекта:

- обработка медицинских анамнезов с использованием современных методов машинного обучения и нейронных сетей глубокого обучения;
- использование элементов искусственного интеллекта в метрологическом обеспечении полигонных испытаний;
- обработка и классификация сигналов с использованием нейронных сетей;
- восстановление траектории движения снаряда и точки стрельбы по зафиксированному участку траектории.

Обработка медицинских анамнезов

Современные технологии обработки естественного языка находят широкое применение в медицине, особенно в задачах автоматической диагностики заболеваний на основе текстовых данных, таких как выписки из историй болезни, жалобы пациентов, заключения врачей и т. д. Разработка интеллектуальных систем в этой области стремительно развивается благодаря внедрению глубокого обучения. Интеллектуальные системы диагностики заболеваний – это системы, использующие методы искусственного интеллекта для анализа медицинских данных с целью постановки диагноза, прогнозирования развития заболеваний и рекомендации методов лечения [1].

Сотрудники кафедры ПМиИТ совместно с группой врачей под руководством С. В. Радченко, ведущего аналитика Республиканского медицинского информационно-аналитического центра Минздрава Республики Татарстан [2], участвовали в технологическом конкурсе «AI'm Doctor» [3], в котором разработали систему поддержки принятия врачебных решений (СППВР). Входными данными системы являются анамнезы заболеваний, выходными данными – основные диагнозы заболеваний в соответствии с кодами МКБ-10. Обработка данных осуществлялась с использованием библиотеки для обработки естественного языка spaCy. На основе анонимизированных эпикризов, представленных на конкурсе «AI'm Doctor», была обучена сверточная нейронная сеть для решения задачи классификации 6 заболеваний органов дыхательной системы и 7-й класс – условно «здоровые» пациенты, которым не диагностировали эти заболевания. Обобщенный показатель качества СППВР составил 91 % на обучающих данных (2223 наблюдений) и 88 % на контрольном наборе данных (745 наблюдений). Ввиду недостаточного объема данных для обучения по некоторым нозологиям обобщенный показатель качества разработанной модели классификации на валидационной выборке составил 67 % (415 наблюдений).

Дальнейшее развитие данной тематики и увеличение точности диагностики связано:

- 1) с увеличением объемов и качества обучающих выборок;
- 2) разделением данных на структурированные (например, лабораторные и клинические исследования), полуструктурированные (например, физикальные обследования) и неструктурированные (такие как, анамнез заболевания, жалобы пациента);
- 3) с более глубоким анализом эпикризов, выделением отдельных симптомов и связей между ними;
- 4) использованием клинических рекомендаций и экспертных баз медицинских данных;
- 5) включением возможности отслеживания динамики заболеваний;
- 6) использованием и дообучением больших языковых моделей (LLM);
- 7) разработкой мультимодальных моделей, позволяющих совместно анализировать текстовые данные, лабораторные и клинические данные, медицинские изображения и сигналы.

Элементы искусственного интеллекта в метрологическом обеспечении полигонных испытаний

Другим направлением исследований, в котором сотрудники кафедры принимали участие, является разработка экспертной системы для оценки достоверности измерений параметров воздушных ударных волн на испытательном полигоне на основе классических подходов и методов анализа данных с использованием элементов искусственного интеллекта.

В процессе измерений, например, параметров воздушных ударных волн [4] системы измерений (СИ) подвергаются значительным перегрузкам, что может привести к ситуациям, когда датчики давления могут выдавать недостоверные сигналы. Для решения этой задачи было разработано программное обеспечение «Виртуальное приборное поле», предназначенное для сбора, обработки и анализа информации, полученной от СИ, оценки достоверности измеряемых параметров в процессе проведения испытаний боеприпасов и выработки рекомендаций о необходимости проведения поверки СИ в межповерочный интервал, а также рекомендаций об оценке достоверности метрологических характеристик СИ на основе обработки массива измерительной информации и математического моделирования работы приборного поля.

Определить достоверность метрологических характеристик СИ позволяет сравнение параметров, полученных в численном и натурном экспериментах. Значительное отклонение экспериментальной кривой давления от теоретической зависимости является основанием для предположения о недостоверности измеряемой информации на датчике давления.

При наличии повторных измерений оценка достоверности измерения осуществляется с использованием современных интеллектуальных методов обработки данных. Исходными данными для анализа являются сигналы с нескольких датчиков давления, технические параметры СИ и сведения об объекте испытаний.

С использованием методов статистического анализа и цифровой обработки сигналов проводится предобработка исходных данных, что позволяет исключить ошибки ввода данных и влияние внешних факторов при проведении испытаний. После исключения внешних факторов экспертная система с использованием элементов искусственного интеллекта, реализованная в программном комплексе «Виртуальное приборное поле. Испытания», позволяет оценить достоверность измерений динамического процесса, на основе математической модели исследуемого процесса и разработанной базы знаний.

Оценка достоверности измерений на датчиках давлений определяется на основании 8 эмпирических правил. Для автоматического выявления факта фиксации ударной волны была реализована сверточная нейронная сеть с использованием библиотеки TensorFlow. Исходные данные состояли из двух типов временных рядов, на которых ударная волна не зафиксирована (рис. 1, *а*) и зафиксирована (рис. 1, *б*).

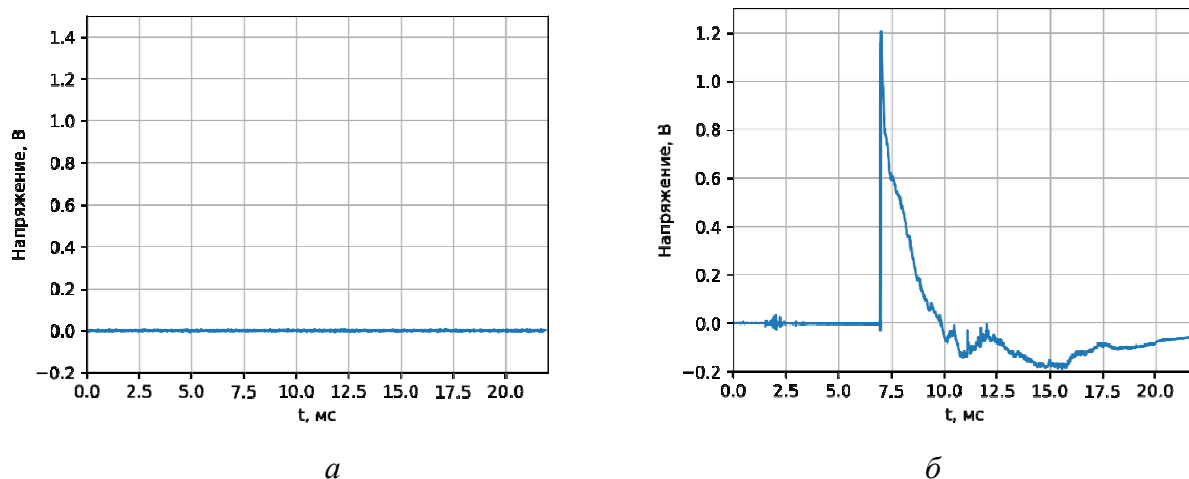


Рис. 1. Незафиксированный (а) и зафиксированный (б) сигналы ударной волны

Обучение сверточной нейронной сети проводилось на наборе из 52 незафиксированных сигналов и 548 зафиксированных сигналов, состоящих из 4838 элементов каждый. Для оценки обобщающей способности нейронной сети исходная выборка была поделена на обучающую (80 %) и тестовую выборки (20 %). Точность классификации нейронной сети на обучающей и тестовой выборках составила 100 %.

В результате проведения проверки выполнения условий создается отчет, в котором содержатся результаты оценки достоверности измерений на датчиках давления и, при наличии оснований, рекомендации о необходимости поверки датчиков давления в межповерочный интервал.

Обработка и классификация сигналов с использованием нейронных сетей глубокого обучения

В приведенном выше примере представлены результаты классификации на основе сравнения формы кривых, т. е. сигнал рассматривается как одномерный вектор во временном пространстве.

Сверточные нейронные сети широко используются для решения задачи классификации сигналов, которые необходимо рассматривать в частотно-временном пространстве, например звуковые и вибрационные сигналы. В этом случае проводится анализ спектральных характеристик сигналов на основе кратковременного преобразования Фурье.

Одной из задач, решаемых студентами и сотрудниками кафедры, была задача классификация неисправности подшипников в механизмах вращения шпинделя по вибрационным сигналам с использованием нейронной сети глубокого обучения [5]. В процессе работы подшипников возникают различные виды неисправностей, которые могут существенно повлиять на надежность и производительность механизмов, использующих вращающиеся шпиндели.

Одним из способов диагностики неисправности подшипников является анализ инструментальных или звуковых сигналов, зафиксированных при вращении шпинделя. На рис. 2 и 3 [6] представлен пример вибрационного сигнала и его спектрограммы, полученного из набора данных [7].

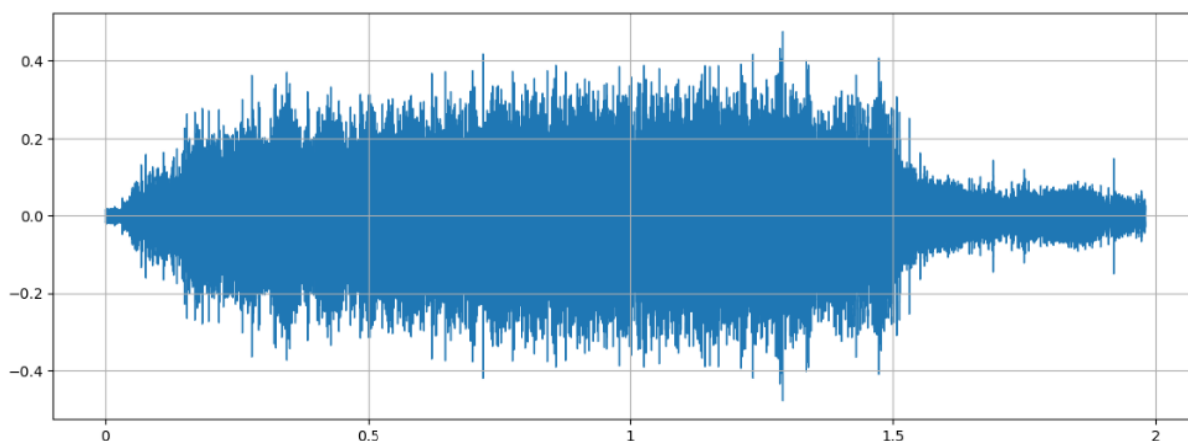


Рис. 2. Вибрационный сигнал

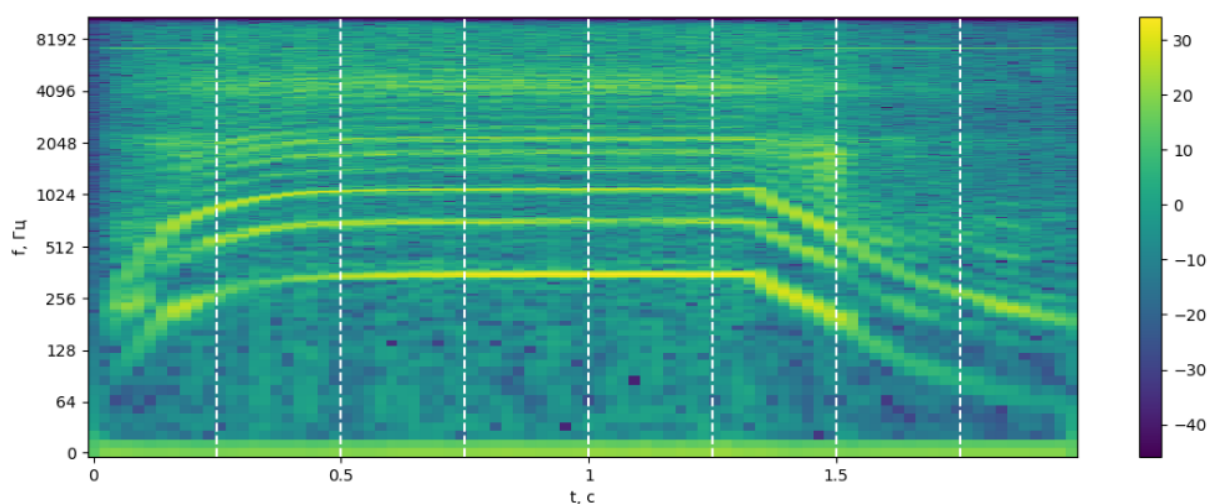


Рис. 3. Спектрограмма вибрационного сигнала

Обучение сверточных нейронных сетей для решения задачи классификации неисправности подшипников проводилось по экспериментальным данным [7, 8].

Как показал анализ обучения нейронных сетей по данным [7], 100%-я точность классификации достигается при 4 слоях (3 – скрытых сверточных слоя, выходной слой – полносвязный). Объем обучающей выборки составил 90 наблюдений и 23 – в контрольной выборке.

Точность классификации неисправности подшипников по вибрационным данным с использованием сверточной нейронной сети по выборке [8] также составила практически 100 % по 1079 наблюдений в обучающей выборке и 1074 в контрольной.

Восстановление траектории движения снаряда и точки стрельбы по зафиксированному участку траектории

Одной из важных задач контрбатарейной борьбы является восстановление точки стрельбы и всей траектории по зафиксированному радиолокатором участку траектории (рис. 4). В такой постановке данная задача относится к классу обратных задач внешней баллистики. Сложность решения этой задачи

заключается в том, что в большинстве случаев неизвестны параметры снаряда, а его координаты измеряются с некоторой погрешностью.

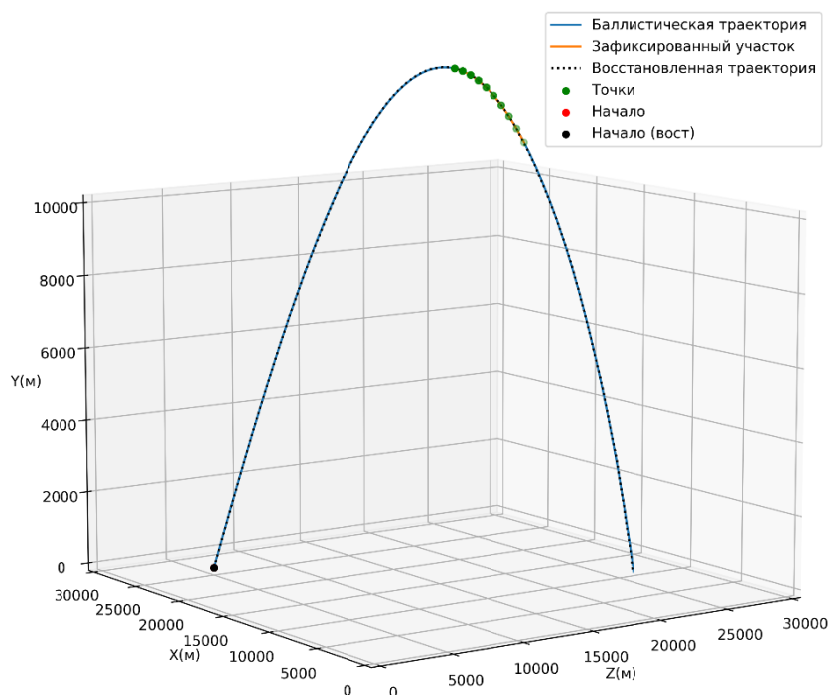


Рис. 4. Траектория снаряда, зафиксированный участок и восстановленная траектория

При решении обратных задач внешней баллистики рассматривается два подхода. Первый подход основан на численных методах решения систем дифференциальных уравнений движения снаряда и алгоритмах решения обратных задач [9]. Второй подход основан на обработке данных траекторных измерений с помощью методов искусственного интеллекта, например нейронных сетей глубокого обучения [10].

На кафедре ПМиИТ под руководством академика РАН и РАН А. М. Липанова и зав. кафедрой, академика РАН И. Г. Русяка был проведен цикл работ, связанных с восстановлением траектории движения снаряда и точки стрельбы по зафиксированному участку траектории.

Для решения этой задачи рассматривались 2 архитектуры нейронной сети: сверточные нейронные сети (CNN) и рекуррентные нейронные сети (RNN). Решались задачи, связанные с классификацией снаряда (отнесение к одному из 20 типов снарядов) по зафиксированному участку траектории и восстановлению точки стрельбы. Обучение проводилось на модельных данных, полученных в результате решения прямой задачи внутренней баллистики.

Проведенный анализ качества классификации показал, что при отсутствии погрешности измерений точность классификации составила 98 % на обучающей и контрольной выборках. С увеличением среднеквадратического отклонения погрешности измерений до 100 м точность классификации уменьшается до 50 %.

Сравнение точности восстановления точки стрельбы с использованием CNN и RNN показало, что при отсутствии погрешности измерений погрешность восстановления точки стрельбы близка к нулю. Также показано, что при увеличении погрешности измерений от 0 до 100 м погрешность восстановления точки стрельбы возрастает практически линейно с коэффициентом 4,5 с использованием архитектуры CNN и 3,0 для архитектуры RNN, т. е. рекуррентные нейронные сети лучше решают задачу по сравнению со сверточными.

Заключение

Таким образом, на кафедре ПМиИТ ИжГТУ имени М. Т. Калашникова развивается направление, связанное с решением практических задач с использованием нейронных сетей глубокого обучения. Представленные в статье задачи, связанные с обработкой текстов и обработкой сигналов, составляют только часть задач, решаемых на кафедре. Дальнейшее развитие связано с обучением студентов бакалавриата и магистратуры по использованию современных средств нейросетевого моделирования и искусственного интеллекта для решения практических задач, а также приобретением высокопроизводительной вычислительной техники, что позволит значительно ускорить процесс работы с нейронными сетями.

Список литературы

1. *Бенгфорт, Б.* Прикладной анализ текстовых данных на Python. Машинное обучение и создание приложений обработки естественного языка / Б. Бенгфорт, Р. Билбро, Т. Охеда. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 368 с.
2. Методологические основы проектирования и реализации систем ведения электронных медицинских карт нового поколения / А. С. Баранов, Я. Р. Еналиев, Ш. М. Гимадеев, М. С. Лагутин, А. И. Латыпов, С. А. Осипов, С. В. Радченко, Д. Ф. Хазиахметов // Международный форум Kazan Digital Week-2022 : сборник материалов Международного форума / под общ. ред. Р. Н. Минниханова. – Казань, 2022. – С. 398–403.
3. Конкурсное задание технологического конкурса в целях реализации Национальной технологической инициативы по созданию интеллектуальной системы поддержки принятия врачебных решений. – URL: ai4med.upgreat.one/upload/document/ai4med_competition_task.pdf (дата обращения: 07.06.2025).
4. Разработка интеллектуальной экспертной системы оценки достоверности измерений параметров динамических процессов / В. Г. Суфиянов, И. Г. Русяк, М. Н. Белобородов, А. Д. Заборовский, Д. А. Клюкин // Проектирование систем вооружения боеприпасов и измерительных комплексов : труды 18-й Всероссийской научно-технической конференции. – Нижний Тагил, 2022. – С. 336–350.
5. *Тукмачёв, Н. А.* Классификация неисправности подшипников в механизмах вращения шпинделя по вибрационным сигналам с использованием нейронной сети глубокого обучения / Н. А. Тукмачёв, В. Г. Суфиянов // II Липановские научные чтения : материалы Всероссийской школы-семинара молодых ученых и студентов «Высокопроизводительные вычисления, визуальные технологии и математическое моделирование задач механики, баллистики и управления техническими и социально-экономическими системами». – Ижевск, 2023. – С. 131–136.

6. *Ибряева, О. Л.* Диагностика неисправностей подшипников качения с использованием пиков спектра и нейронных сетей / О. Л. Ибряева, М. Н. Мохаммад // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2022. – Т. 11, № 2. – С. 59–71. – DOI: 10.14529/cmse220205.
7. *Isaienkov K.* Bearing classification / К. Isaienkov, I. Zadorozniy. – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/isaienkov/bearing-classification> (дата обращения: 29.04.2025).
8. IMS Bearing Dataset / Center for Intelligent Maintenance Systems, University of Cincinnati; NASA Prognostics Data Repository. – 2007. – URL: <https://data.nasa.gov/dataset/ims-bearings> (дата обращения: 10.05.2025).
9. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 57. – С. 76–83. – DOI 10.17223/19988621/57/6.
10. *Hou Lh., Liu Hj.* An End-to-End LSTM-MDN Network for Projectile Trajectory Prediction. In: Cui, Z., Pan, J., Zhang, S., Xiao, L., Yang, J. (eds) Intelligence Science and Big Data Engineering. Big Data and Machine Learning. IScIDE 2019. Lecture Notes in Computer Science. – Vol 11936. – 2019. – Springer, Cham. – DOI: 10.1007/978-3-030-36204-1_9

Численное моделирование топочного процесса в водогрейном котельном агрегате

В. А. Тененев, Д. А. Хворенков

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Основой для конструирования котельных агрегатов являются результаты расчета аэродинамики и теплообмена в топочной камере и конвективных элементах котла с учетом протекающих процессов горения топлива. Рассмотрена возможность применения метода С. К. Годунова к численному моделированию процессов в топочных устройствах и конвективных элементах котельного агрегата. В качестве примера взят водогрейный водотрубный котел марки КВ-ГМ-1,25-115. Для реализации математической модели процессов в элементах котла применен метод С. К. Годунова в сочетании со схемой MUSCL, обеспечивающей второй порядок аппроксимации разностных уравнений. Процесс горения природного газа в топке описывается в рамках простой химически реагирующей системы (ПХРС). Для учета процесса горения предложено добавить в уравнение переноса энергии источник, эквивалентный диффузионному горению при допущениях ПХРС. Численное моделирование показало существенную неоднородность параметров газодинамики и теплообмена в топочной камере, в конвективном пучке котельного агрегата наблюдается вихревое течение.

Ключевые слова: топочные процессы, газовая динамика, теплообмен, численное моделирование, горение.

При проектировании котельных агрегатов возникает задача расчета аэродинамики и теплообмена в топочной камере котла и в конвективных газоходах с учетом протекания процессов горения топлива. Это необходимо для определения конструктивных характеристик элементов котла: поверхностей нагрева в топочной камере и конвективных элементах, внутреннего газового пространства, где протекает процесс сгорания топлива и теплообмен с поверхностями нагрева.

В итоге, решение задачи численного моделирования аэродинамики и теплообмена топочных процессов позволит разработать такую конструкцию котельного агрегата, которая обеспечит необходимую производительность при достижении максимального КПД и минимальных габаритных размерах. КПД котла и его габаритные размеры являются основными характеристиками, которые имеет смысл улучшать. Габариты котла определяют в целом компоновку котельной, возможность ее размещения в стесненных условиях, металлоемкость, массу и, в конечном итоге, стоимость теплоисточника, а КПД котла определяет энергоэффективность котельной установки в целом.

Для численного моделирования необходимо иметь арсенал численных методов газовой динамики и теплообмена. В работах зарубежных авторов рассмотрены различные аспекты моделирования процессов в котельном оборудовании. Так, в статье [1] представлена математическая модель для расчета температуры в прямоточном паровом котельном агрегате, основанная на одномерных нестационарных уравнениях газодинамики и теплообмена. Автор считает, что разработанная математическая модель может быть также применена для котлов с циркуляцией и в широком диапазоне режимов работы. В [2] представлен развернутый обзор современных технологий и последних разработок в области высокотемпературных теплообменников, в том числе трубчатых. Рассматриваются основные критерии, необходимые для проектирования высокотемпературных теплообменников, а именно типы жидкостей, условия работы, требуемая скорость теплопередачи и затраты. В статье [3] проведен термодинамический анализ газового котельного агрегата. Численная модель реализована на языке программирования Modelica и смоделирована в программной среде Dymola. Модель горения основана на фиксированном расходе природного газа с заданным составом, который при сгорании образует стабильную смесь дымовых газов, процесс теплопередачи происходит от дымовых газов к циркулирующей воде. В статье [4] разработана модель теплопередачи и гидродинамики для изучения работы котла с циркуляцией рабочего тела в условиях переменной нагрузки. Модель позволяет рассчитывать независимо контуры экранных труб и конвективные пучки.

В [5] представлены результаты исследования теплопередачи в установках утилизации тепла дымовых газов котлов и потенциала извлечения теплоты при конденсации влаги из дымовых газов. Получены полуэмпирическая формула, устанавливающая зависимость между температурой точки росы и коэффициентом теплопередачи дымовых газов, и безразмерная формула, устанавливающая взаимосвязь между коэффициентом теплопередачи и эксплуатационными параметрами котельного агрегата. Также обнаружено, что коэффициент теплопередачи чувствителен к температуре охлаждающей воды на входе.

Численное моделирование топочного процесса в жаровой трубе с реверсивным факелом в жаротрубном котле проведено в работе отечественных авторов [6] с применением пакета прикладных программ ANSYS Fluent 12.1.4. В статье [7] приведена математическая модель, методика численной реализации и результаты численного исследования сжигания метано-воздушной смеси в топочных устройствах энергетических котлов на основе пространственных уравнений газодинамики с уравнениями двухпараметрической модели турбулентности и с уравнением переноса доли смеси. Расчеты проведены в среде STAR-CCM+.

Рассмотрим возможность применения метода С. К. Годунова [8] для численного моделирования процессов в топочных устройствах и теплообменниках. Объектом исследования выбран тягодутьевой тракт водогрейного котельного агрегата КВ-ГМ-1,25-115 конструкции «Теплогаз» производства ООО «Энергетическая компания «ЭНКО» (рис. 1). Котел КВ-ГМ-1,25-115 представляет

собой стальной водотрубный котельный агрегат с топочной камерой, имеющей форму параллелепипеда и конвективной частью, расположенной смежно с топочной камерой и отделенной от нее газоплотной перегородкой. Отвод продуктов сгорания выполнен по всей высоте конвективной части котла.

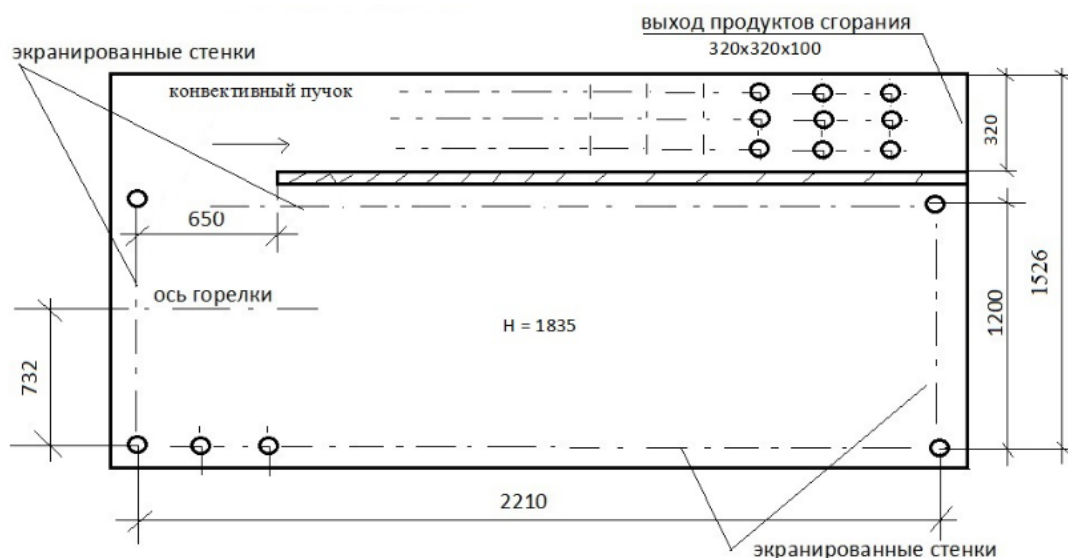


Рис. 1. Расчетная область котла KB-ГМ-1,25-115

Основные уравнения математической модели записаны в декартовой системе координат. Уравнение неразрывности записывается в общем виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{U} = 0,$$

где \mathbf{U} – вектор скорости.

Уравнения сохранения импульса и уравнение сохранения энергии имеют вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\nabla p + \text{Div} P, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(C_v T + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) = \nabla (P\mathbf{U}) + \nabla \mathbf{q},$$

где P – тензор вязких напряжений; C_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; \mathbf{q} – вектор теплового потока. Система уравнений (1) дополнена уравнениями для переноса кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации турбулентности [9]. В методе С. К. Годунова потоки рассчитываются на гранях контрольного объема. В случае криволинейной сетки производные, входящие в тензор \mathbf{P} , определяются по следующей схеме [10]:

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} = \frac{(b_1^i c_1^i + b_2^i c_2^i + b_3^i c_3^i)}{D_c}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = (r_i) = (x, y, z)$ – координаты центров контрольных объемов. Подробное содержание компонент вязкого тензора в (1) и схема вычисления производных

описаны в работе [11]. Для повышения порядка аппроксимации разностного метода С. К. Годунова применяется схема MUSCL. Значения газодинамических параметров для решения задачи о распаде разрыва определяются с применением экстраполяции с ограничителем [12]. Переход к следующему шагу по времени осуществляется по двухшаговой схеме со вторым порядком точности [11].

Модель горения рассматривается в рамках модели ПХРС, включающей три компонента: горючее, окислитель и продукты сгорания. Модель предполагает, что состояние газовой смеси в любой точке пламени характеризуется двумя параметрами: один из них выражает результат смешения молекулярного или турбулентного (диффузии и теплопроводности), а другой – результат химической реакции. В рамках модели ПХРС используется понятие переноса сохраняющегося свойства f . Обозначая c_i – концентрации компонентов ($i = 1, 2, 3$ – горючий, окислительный и инертный компоненты газа), получим выра-

жение для $f = \frac{c_1 - \frac{c_2}{\Phi} + \frac{c_{2\infty}}{\Phi}}{c_{10} + \frac{c_{2\infty}}{\Phi}}$, где индекс 0 соответствует параметрам на поверх-

ности подачи горючего, а ∞ – на поверхности подачи воздуха. Величина Φ определяется стехиометрическим соотношением компонентов. Переменная f в этом случае имеет смысл «смесевой доли». Из комбинации уравнения энергии и уравнений для концентраций [13] получено выражение, связывающее f

с температурой $f = \frac{c_p(T - T_\infty) + c_1 Q}{c_p(T_s - T_\infty) + c_{10} Q}$, где c_p – теплоемкость при постоянном давлении, Q – теплота сгорания.

Для переменной f добавим к системе еще одно уравнение с коэффициентом переноса $D_f = \nu \frac{1 + \chi}{\sigma_T} : \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} f) = \nabla \cdot D_f \nabla f$ с граничными условиями $f = 1$ на поверхности подачи горючего, $f = 0$ на поверхности подачи окислителя. Из условия положения фронта пламени определяются значения концентраций горючего c_1 и окислителя c_2 , а также температура газа:

$$\begin{aligned} \text{при } f < f_{st} : c_1 = 0, \quad c_2 = c_{2\infty} \frac{f_{st} - f}{f_{st}}, \quad T_h = T_\infty + \frac{f}{f_{st}}(T_a - T_\infty); \\ \text{при } f > f_{st} : c_2 = 0, \quad c_1 = c_{10} \frac{f_{st} - f}{f_{st} - 1}, \quad T_h = T_s + \frac{1 - f}{1 - f_{st}}(T_a - T_s). \end{aligned}$$

Для уравнения энергии в рамках модели ПХРС необходимо определить приход энергии в результате сгорания газа Q_T . Для нахождения прихода энергии $Q_T = \dot{m}Q$ необходимо определить массовую скорость горения \dot{m} , что требует задания констант химических реакций и выводит за рамки ПХРС. При рассмотрении стационарной картины сгорания система дифференциальных уравнений решается методом установления. В этом случае введем выражение

для Q_T , чтобы согласовать величину температуры продуктов сгорания, полученную из уравнения энергии, с температурой T_h : $Q_T = \eta \left| \frac{T_h - T}{T_a} \right| \left(\frac{T_h - T}{T_a} \right)$, где η – итерационный коэффициент.

Результаты численных расчетов линий тока и температуры для котельного агрегата КВ-ГМ-1,25-115 приведены на рис. 2.

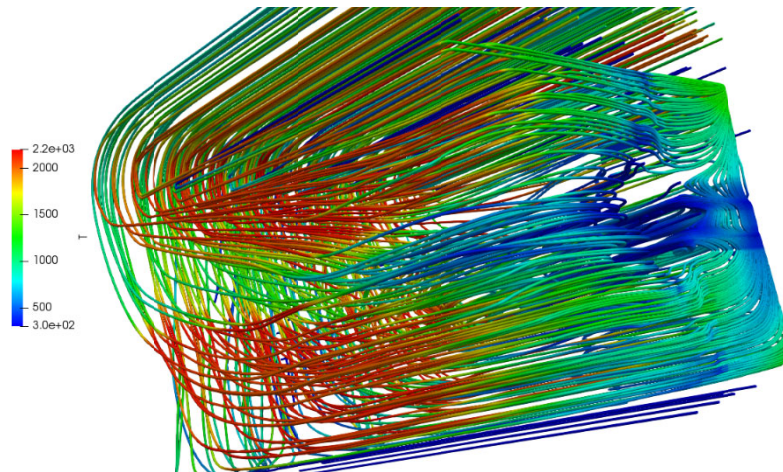


Рис. 2. Картина течения и температура в топочной камере котла

На рис. 3 наблюдается натекание струи продуктов сгорания на заднюю стенку котла и реверсивный режим горения.

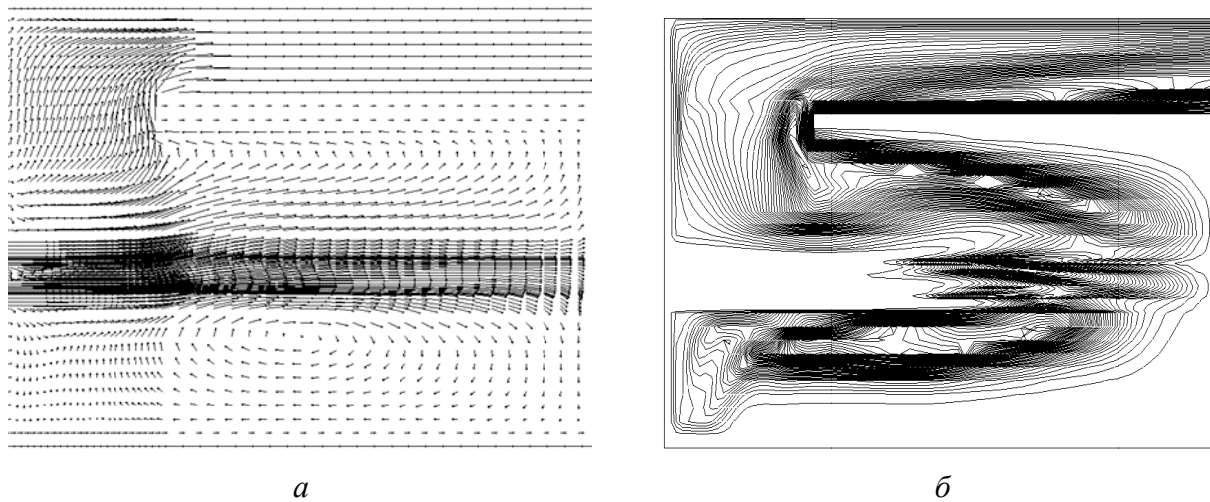


Рис. 3. Векторное поле скоростей (а) и изотермы (б) в плоскости (x, y) плоскости, $z = 0$

Из рис. 3 видно, что поле температуры потока у стенок топочной камеры и конвективного пучка неравномерное. Распределение температуры, числа Нуссельта, теплового потока на вертикальной газоплотной перегородке, отделяющей топку от конвективной части, приведено на рис. 4, а, а на задней стенке топки – на рис. 4, б.

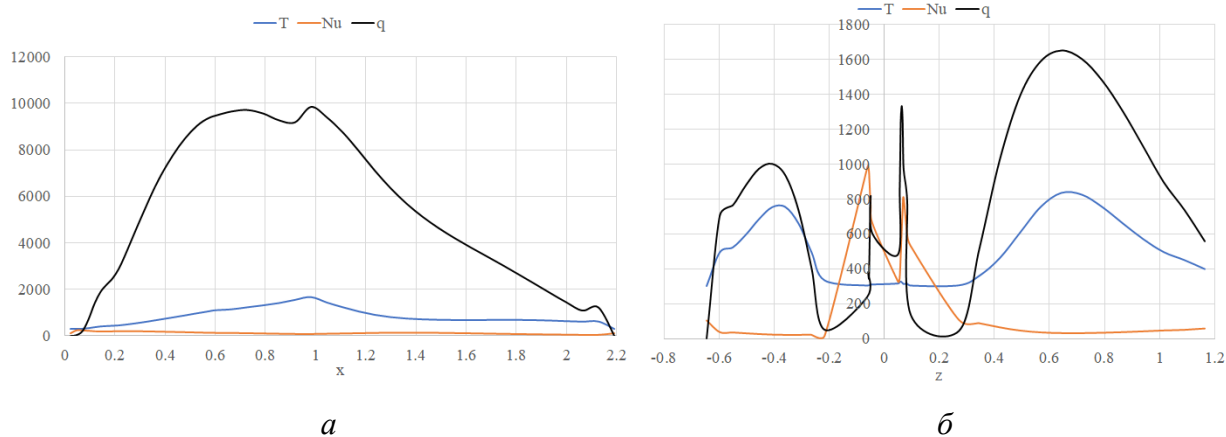


Рис. 4. Распределение температуры (T , К), числа Нуссельта (Nu), теплового потока ($q, \frac{Вт}{М^2}$): a – на вертикальной газоплотной перегородке; b – на задней стенке камеры

В конвективном пучке продукты сгорания проходят через коридорные ряды труб. Для расчета в этой области дымового тракта строится криволинейная разностная сетка в плоскости (x, y) (рис. 5), в плоскости (x, z) – сетка прямоугольная.

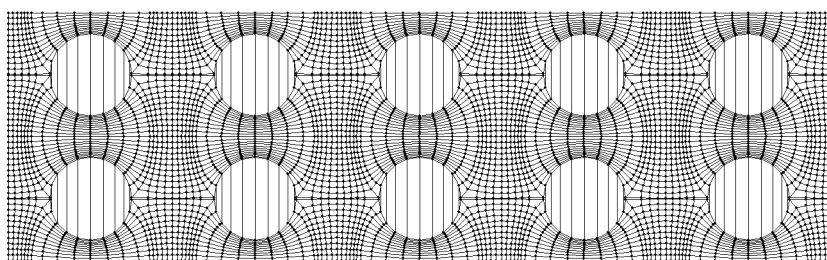


Рис. 5. Разностная сетка в плоскости (x, y)

При обтекании труб формируется вихревое течение (рис. 6).

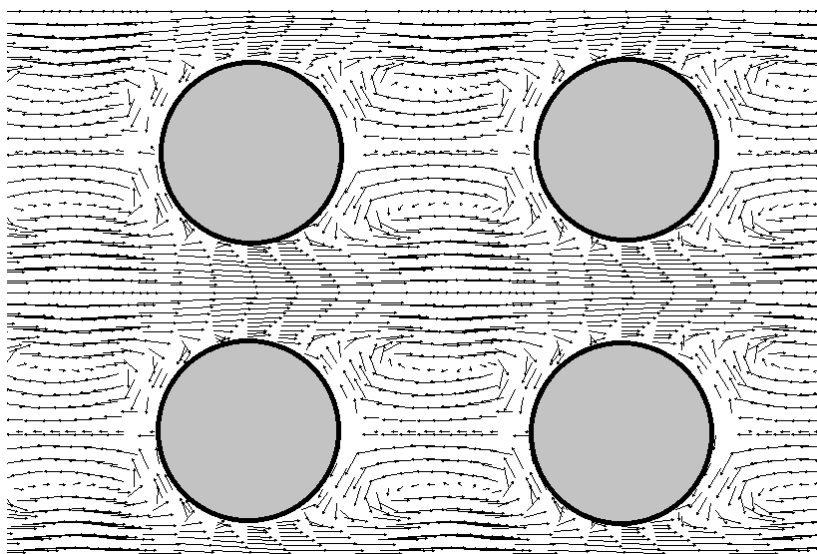


Рис. 6. Векторное поле скоростей в плоскости (x, y)

Линии тока в этой области показаны на рис. 7. В конвективной части котла, имеющей форму параллелепипеда, формируется практически плоское течение со снижением скорости только вблизи боковых стенок.

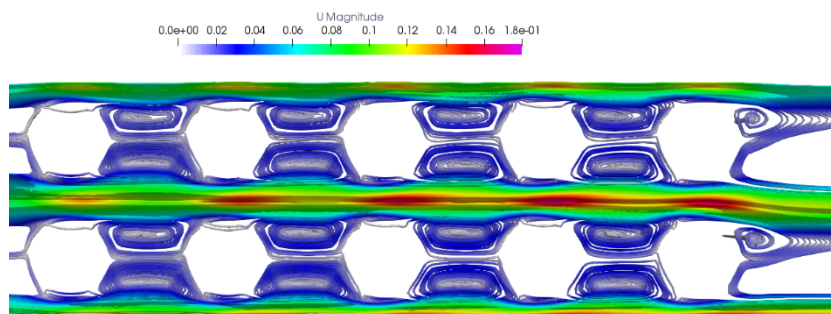


Рис. 7. Линии тока в конвективной части котла

На рис. 7 приведена скорость, отнесенная к скорости звука. Относительная величина турбулентной вязкости при обтекании труб конвективной части показана на рис. 8. На рис. 9 представлены изобары в конвективной области поля течения.

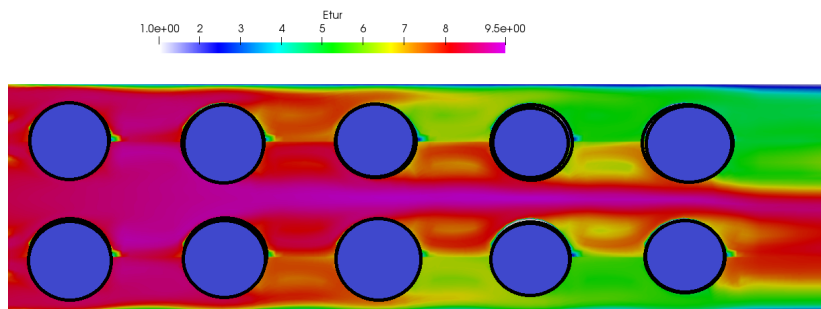


Рис. 8. Относительная величина турбулентной вязкости в конвективной части котла

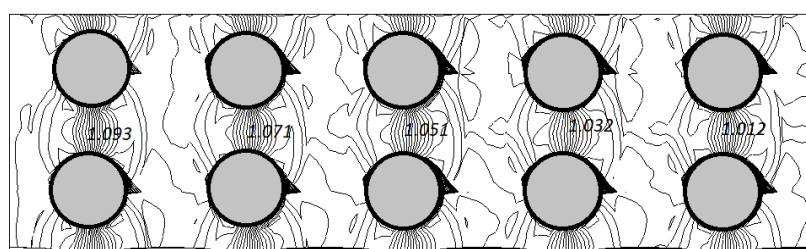


Рис. 9. Изобары в конвективной части котла

Результаты расчета позволяют сделать следующие выводы:

- численное моделирование показало существенную неоднородность параметров газодинамики и теплообмена в топочной камере котельного агрегата, что свидетельствует о перспективности внесения изменений в его конструкцию;

- при выборе типа горелки с точки зрения длины факела необходимо анализировать тепловое напряжение на задней стенке топки. Результаты расчета демонстрируют натекание потока на заднюю стенку (рис. 3, а), высокое

тепловое напряжение и неравномерный характер изменения числа Nu (рис. 4, б). В случае большой длины факела отдельные области задней стенки могут оказаться в условиях недопустимо высоких температур, что приведет к прогоранию труб заднего экрана;

– в конвективной части наблюдается вихревое течение, что приводит к падению давления по тракту.

Список литературы

1. Lukas Hubka. Temperature Dynamic Model of Once-through Boiler Based on Flue Gases Heat Transports / Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011, p. 8265-8270.
2. Sajjad Mahmoudinezhad, Meisam Sadi, Hamed Ghiasirad, Ahmad Arabkoohsar. A comprehensive review on the current technologies and recent developments in high-temperature heat exchangers / Renewable and Sustainable Energy Reviews Volume 183, September 2023, 13467, <https://doi.org/10.1016/j.rser.2023.113467>.
3. Katarina Simić, Ilya T'Jollyn, Willem Faes, Josué Borrajo Bastero, Jelle Laverge and Michel De Paere. Dynamic modelling of gas-fired condensing boiler units for the use in residential buildings. / Proceedings of the 15th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics (HEFAT 2021). p.688-693.
4. R.S.Jha, Mandar M.Lele. Dynamic modeling of a water tube boiler / Heat Transfer, V. 51, № 7, November 2022, pp. 6087-6121.
5. Wei Zhang, Suilin Wang, Lianbo Mu, Hamid Jamshidnia, Xudong Zhao. Investigation of the forced-convection heat transfer in the boiler flue-gas heat recovery units employing the real-time measured database / Energy, Volume 238, Part A, 1 January 2022.
6. Хаустов, С. А. Аэродинамическая структура топочной среды в жаровых трубах с реверсивным факелом / С. А. Хаустов, А. С. Заворин // Энергосбережение и водоподготовка. – 2014. – № 6 (92). – С. 63–66.
7. Численное исследование способов повышения эффективности сжигания топлива в топочных устройствах энергетических котлов / В. Н. Ковальногов, Р. В. Федоров, Д. А. Генералов, С. В. Бусыгин // Автоматизация процессов управления. – 2022. – № 2 (68). – С. 70–79. – DOI: 10.35752/1991-2927-2022-2-68-70-79.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. – Москва : Наука, 1976. – 400 с.
9. Волков, К. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений / К. Н. Волков, В. Н. Емельянов. – Москва, 2008. – 368 с.
10. Wesseling P., Segal A., and Kassel C. G. M. Computing Flows on General Three-Dimensional Nonsmooth Staggered Grids. Journal of Computational Physics 149, 333–362 (1999). DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1564-5_2.
11. Редер, Т. Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана / Т. Редер, В. А. Тененев, А. А. Чернова // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 68. – С. 141–157. – DOI 10.17223/19988621/68/13.
12. Wesseling, Pieter, Dr. Principles of computational fluid dynamics / Pieter Wesseling. p. cm. - (Springer series in computational mathematics, ISSN 0179-3632; 29) Mathematics Subject Classification (1991): 76M, 65M, XII, 644p.
13. D. B. Spalding, 'Combustion and Mass transfer', Pergamon Press, 1979. P. 200.

**СЕКЦИЯ 1.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ,
ФИЗИКИ, ХИМИИ**

УДК 539.231 + 539.319

Исследование механических характеристик металлокомпозитов в процессе осаждения методами математического моделирования*

Ф. А. Виноградов, А. Ю. Федотов, О. Ю. Северюхина, А. Ю. Саломатина

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН

Применение нанопленок на основе ниобия и кобальта становится всё более востребованным благодаря прогрессу в таких сферах, как наноэлектроника и спинтроника. Научные изыскания в этой области выявляют новые закономерности, помогая разрабатывать модели для прогнозирования поведения наноструктур при производстве и эксплуатации. Однако остаются нерешенные вопросы, связанные с осаждением нанопленок, включая расчет их механических параметров. Целью данной работы являлось описание и апробация методики вычисления механических характеристик наноплёнок, полученных методом магнетронного напыления.

Ключевые слова: нанопленки, молекулярная динамика, MEAM, LAMMPS, остаточные напряжения.

Введение

Нанопленки на основе ниобия и кобальта перспективны для наноэлектроники и спинтроники благодаря их уникальным физико-химическим свойствам. Исследования показывают, что такие композиты обладают синергетическими эффектами, повышая функциональность и производительность устройств. Например, их применение в системах хранения энергии увеличивает емкость и скорость зарядки, а в устройствах памяти – снижает теплотери [1, 2].

Несмотря на то что работы в этом направлении ведутся [3], задача осаждения нанопленок и расчета их механических параметров остается актуальной. Целью данной работы является описание и апробация методики расчета механических характеристик нанопленок, полученных магнетронным напылением.

© Виноградов Ф. А., Федотов А. Ю., Северюхина О. Ю., Саломатина А. Ю., 2025

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема №FUUE-2025-0001 «Моделирование и экспериментальные исследования структуры и магнитных параметров контакта Джозефсона из многослойной наноструктуры»), № гос. регистрации 125020501412-9).

Математическая модель

Моделирование выполнялось с помощью программного пакета молекулярно-динамического проектирования LAMMPS. Метод основывается на последовательном решении уравнений движения всех атомов системы, дополненных начальными условиями в виде координат и скоростей атомов:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

$$t_0 = 0, \quad \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad \frac{d\mathbf{r}_i(t_0)}{dt} = \mathbf{v}_i(t_0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где m_i – это масса i -го атома; N – количество атомов в системе; \mathbf{r}_{i0} и \mathbf{r}_i начальный и текущий радиус-векторы соответственно; \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_{i0} – текущая и начальная скорость i -го атома соответственно; $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}(t))$ – суммарная сила, действующая на i -й атом. В уравнении (1) сила определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}(t)) = -\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \mathbf{r}_i(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}(t) = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$, $U(\mathbf{r}(t))$ – функция, описывающая силовое взаимодействие системы.

Метод молекулярной динамики опирается на понятие потенциала $U(\mathbf{r})$, который отвечает за характер и величину взаимодействия атомов системы. В данной работе использовался потенциал MEAM (Modified Embedded Atom Method). В данном методе результирующий потенциал представляется в виде суммы вкладов энергий отдельных атомов, причем отдельно выделяется вклад парного и многоэлементного взаимодействия:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_i U_i(\mathbf{r}) = \sum_i \left(F_i(\bar{\rho}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \phi_{ij}(r_{ij}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где $U_i(\mathbf{r})$ – вклад в общую потенциальную энергию каждого отдельного атома; $F_i(\bar{\rho}_i)$ – функция погружения, зависящая от фоновой электронной плотности $\bar{\rho}_i$; $\phi_{ij}(r_{ij})$ – парное взаимодействие между атомами, которые находятся на расстоянии r_{ij} . Более подробно о функции погружения и парном взаимодействии описано в работе [4].

После того как моделирование композита завершено, запускается расчет напряжений. В атомистическом подходе остаточные напряжения вычисляются через координаты, скорости и силы в каждый момент времени:

$$\sigma_{ab} = -mv_a v_b - W_{ab}, \quad (5)$$

где a и b принимают значения x, y, z для вычисления тензора напряжения. Первый член – вклад кинетической энергии i -го атома. Второй член – это

вириальный вклад внутри- и межмолекулярных взаимодействий. Он рассчитывается по формуле

$$W_{ab} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k, \quad (6)$$

где \mathbf{r}_k и \mathbf{F}_k – пространственные векторы координат и сил для k -й частицы. На основании шести основных компонент тензора напряжений, полученных по формуле (5), было рассчитано гидростатическое напряжение, напряжение фон Мизеса и девиаторное напряжение фон Мизеса.

Постановка задачи

Система представляет собой наноккомпозит: подложка из ниобия с последовательно осажденными слоями кобальта и ниобия (рис. 1). Граничные условия: периодические по горизонтали, отражение по вертикали. Процесс осаждения включал три этапа: напыление кобальта (2,6 нм, 18 тыс. атомов), напыление ниобия (9,6 нм, 70 тыс. атомов), напыление кобальта (3,5 нм, 26 тыс. атомов).

Атомам задавалась начальная скорость в направлении подложки, силы взаимодействия атомов, скорости и координаты рассчитывались с шагом 0,001 пс. При моделировании рассматривались элементарные объемы, отмеченные на рис. 1 (1 – внутри подложки, 2 – на поверхности, по ~380 атомов ниобия, размеры 2,6×2,6×1,1 нм). Количество атомов могло незначительно изменяться из-за тепловых флуктуаций.

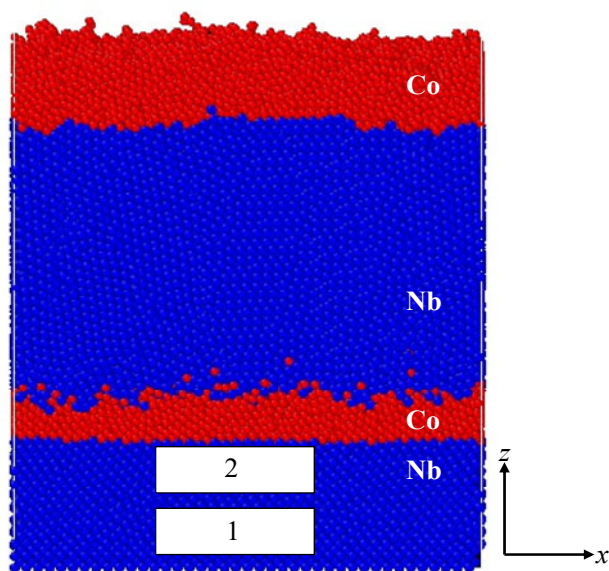


Рис. 1. Изображение наноккомпозита Nb-Co, полученного в результате моделирования

Результаты

Результаты расчетов остаточных напряжений представлены на рис. 2. Наблюдаются резкие колебания тензора напряжений, вызванные использованием

мгновенных значений атомных параметров. Большинство компонент колеблется около нуля, кроме σ_{zz} (-2,17 ГПа) и σ_{yy} (2,08 ГПа) на этапе 0–200 пс, что связано с компенсацией воздействия осаждаемых атомов.

На втором участке характер напряжений аналогичен, но компонента σ_{yy} достигает 3,77 ГПа (первый этап), стабилизируясь около 2,5 ГПа. Это свидетельствует о возникновении напряжения в подложке в этом направлении, что может быть обусловлено различиями параметров кристаллических решеток материалов.

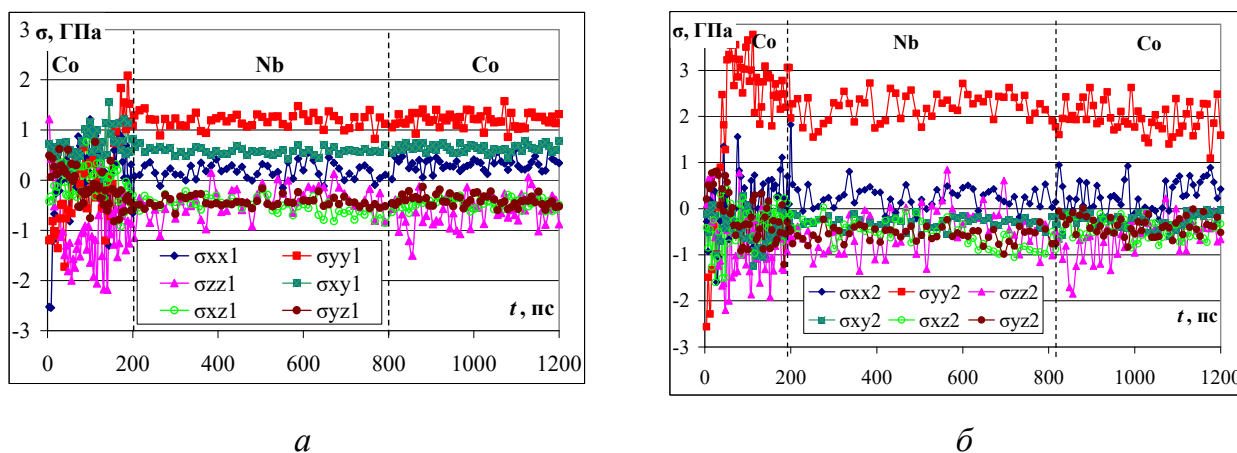


Рис. 2. Изменение остаточных напряжений в процессе осаждения для первого (а) и второго (б) участков

Гидростатическое напряжение рассчитывалось для определения объемной деформации образца, напряжение фон Мизеса служило критерием перехода образца в состояние пластической деформации, девиаторное напряжение фон Мизеса вычислялось для анализа неравномерности распределения напряжений в подложке.

Расчет напряжения фон Мизеса показал, что на первом участке напряжение колеблется в районе 2 ГПа, а на втором – в районе 3 ГПа, что меньше средней твердости объемного ниобия ($4,8 \pm 0,5$ ГПа), приведенной в [5].

Заключение

В работе представлена методика расчета механических свойств наноматериалов. Модель обеспечивает высокую воспроизводимость результатов, что позволяет применять ее при разработке новых материалов.

Исследование последовательного осаждения пленок кобальта и ниобия показало колебания тензора напряжений, вероятно вызванные тепловыми флуктуациями и взаимодействием с осаждаемыми атомами. Отсутствие значительных гидростатических и девиаторных напряжений свидетельствует о равномерном распределении напряжений без объемной деформации, а касательные напряжения не вызывают пластической деформации ниобия.

Список литературы

1. Моделирование улучшения интерфейса многослойных наносистем ниобий-кобальт прессованием / А. В. Вахрушев, Ф. А. Виноградов, А. Ю. Федотов, А. С. Сидоренко // *Химическая физика и мезоскопия*, 2023. – Т. 25. – № 2. – С. 160–169.
2. Vakhrushev A.V., Fedotov A.Yu., Severyukhina O.Yu., Sidorenko A.S. The influence of structure and local structural defects on the magnetic properties of cobalt nano-films // *Beilstein Journal of Nanotechnology*, 2023. – vol. 14. – pp. 23–33.
3. *Бабушкин А. С., Курьянов А. Н.* Исследование методом молекулярной динамики формирования механических напряжений в поликристаллических пленках Cr, а также влияния бомбардировки ионами Ag во время и после осаждения // *Взаимодействие ионов с поверхностью ВИП–2021*. – 2021. – С. 223–226.
4. Моделирование процессов формирования атомарной структуры сверхпроводящего спинового вентиля / А. В. Вахрушев, А. Ю. Федотов, Ю. Б. Савва, А. С. Сидоренко // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2020. – № 2. – С. 16–27.
5. *Ломыгин, А. Д.* Свойства ниобия и пентаоксида ниобия в микро- и наноструктурах / А. Д. Ломыгин, А. А. Павельева, И. С. Саквин // *Международный студенческий научный вестник*. – 2018. – № 6. – С. 176–176.

Определение вклада колебаний ствола в рассеивание снарядов 30-мм автоматической пушки

Д. А. Клюкин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе анализируется воздействие продольно-поперечных колебаний ствола автоматического орудия на кучность стрельбы, обусловленных динамикой пороховых газов. Предложена математическая модель, интегрирующая напряженно-деформированное состояние ствола, его колебательные процессы при автоматической стрельбе и их влияние на баллистические характеристики снарядов. Методом компьютерного моделирования проведена серия вычислительных экспериментов для пяти очередей по десять выстрелов на дистанции 1400 метров с последующим сопоставлением с табличными данными стрельбы. Установлено, что вклад колебаний ствола в рассеивание составляет 23 % по горизонтали и 30 % по вертикали. Полученные результаты могут быть использованы для совершенствования конструкций ствольных систем.

Ключевые слова: математическое моделирование; колебания ствола; автоматическая пушка; баллистика; кучность стрельбы.

Введение

Автоматическая стрельба из артиллерийских орудий сопровождается значительным динамическим воздействием пороховых газов, вызывающим продольно-поперечные колебания ствола [1]. Как показывают исследования [2, 3], эти колебания существенно влияют на кучность боя. В существующих работах основное внимание уделяется моделированию динамики ствола и колебаниям дульного среза, приводящим к изменению угла вылета снаряда.

Экспериментальные данные свидетельствуют, что наибольшее влияние на точность оказывают поперечные колебания, тогда как продольные и крутильные эффекты менее значимы [4]. Дополнительными факторами, ухудшающими кучность, являются тепловые деформации ствола при интенсивной стрельбе [5] и технологические отклонения геометрии канала [1, 6].

Целью данного исследования является оценка влияния колебаний ствола на рассеивание снарядов путем сопоставления результатов численного моделирования с табличными данными стрельбы.

1. Постановка задачи

Математическая модель колебаний ствола базируется на работе [6]. Ствол рассматривается как труба переменного сечения длиной L . Уравнение продольных колебаний имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F g \sin \varphi - q_1 + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^{xx}) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – величина продольных колебаний ствола; ρ – плотность материала ствола; g – ускорение силы тяжести; ϕ – угол возвышения ствола; $q_1 = q_1(x, t)$ – распределенные внешние силы, действующие в продольном направлении; $p_1 = p_1(x, t)$ – распределение избыточного давления внутри ствола, которое определяется из решения основной задачи внутренней баллистики; p_a – атмосферное давление; $\sigma^{xx} = \sigma^{xx}(x, t)$ – продольные напряжения в сечении ствола:

$$\sigma^{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df - \frac{\alpha E}{F} \int_F T(x, r, t) df, \quad (2)$$

где E – Модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного теплового расширения; $T(x, r, t)$ – температура ствола в точке с координатами x и r в момент времени t , определяемая по квазиодномерной математической модели [7].

В качестве начальных условий для уравнения (1) примем условия покоя:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где $u_0(x)$ – начальное продольное перемещение, определяемое из решения стационарной задачи о прогибе ствола под действием силы тяжести.

В качестве граничных условий будем полагать, что у казенного среза ствол закреплен и продольные перемещения отсутствуют:

$$u(0, t) = u_0(0), \quad (4)$$

а на дульном срезе на ствол внешние силы не действуют:

$$FE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (5)$$

Уравнение поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости Oxy имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho F g \cos \phi - q_2 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (v + v_{00})}{\partial x^2} + \\ + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\alpha E \int_F T(x, r, t) y df \right), \quad (6)$$

с начальными условиями:

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

и граничными условиями:

$$v(0, t) = v_0(0), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

$$EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0,$$

где $v = v(x, t)$ – величина поперечных колебаний в вертикальной плоскости; $v_0 = v_0(x)$ – величина начального прогиба в вертикальной плоскости; $q_2 = q_2(x, t)$ – распределенные внешние силы, действующие по оси Oy ; $v_{00} = v_{00}(x)$ – технологическое отклонение центра канала ствола относительно оси Oy ; $J_z = J_z(x)$ – момент инерции сечения относительно оси Oz .

Уравнение поперечных колебаний ствола в горизонтальной плоскости Oxz имеет вид:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_3 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (w + w_{00})}{\partial x^2} + \\ + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\alpha E \int_F T(x, r, t) z df \right), \quad (9)$$

с начальными условиями:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

и граничными условиями:

$$w(0, t) = w_0(0), \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (11) \\ EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0,$$

где $w = w(x, t)$ – величина поперечных колебаний в горизонтальной плоскости; $w_0 = w_0(x)$ – величина начального прогиба в горизонтальной плоскости; $q_3 = q_3(x, t)$ – распределенные внешние силы, действующие по оси Oz ; $w_{00} = w_{00}(x)$ – технологическое отклонение центра канала ствола относительно оси Oz ; $J_y = J_y(x)$ – момент инерции сечения относительно оси Oy .

Для аппроксимации уравнений использован интегро-интерполяционный метод [8].

Кучность стрельбы оценивалась через средние отклонения по высоте B_y и направлению B_z , рассчитываемые по формулам:

$$B_y = \text{Med}(\Delta y), \quad B_z = \text{Med}(\Delta z), \\ \Delta y_i = |y_i - \text{Med}(y)|, \quad \Delta z_i = |z_i - \text{Med}(z)|, \quad i = 1, \dots, N,$$

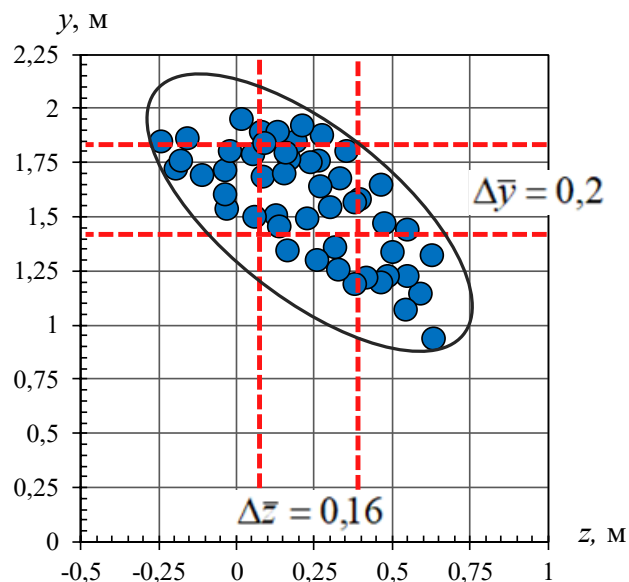
$$\text{Med}(y) = \begin{cases} y_{[(N+1)/2]}, \\ \frac{y_{[N/2]} + y_{[(N+1)/2]}}{2}, \end{cases} \quad \text{Med}(z) = \begin{cases} z_{[(N+1)/2]}, \\ \frac{z_{[N/2]} + z_{[(N+1)/2]}}{2}, \end{cases}$$

где y_i – высота места попадания снаряда по цели.

2. Результаты моделирования стрельбы из автоматической пушки

Моделирование проведено для 30-мм автоматической пушки при следующих условиях: дальность – 1400 м, угол возвышения $\theta = 0$, длина очереди – 10 выстрелов, интервал между выстрелами – 182 мс, количество очередей – 5. Материальные характеристики ствола: $\rho = 7850$ кг/м³, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹.

На рисунке представлены места попадания снарядов по плоской мишени, находящейся перпендикулярно траектории стрельбы на расстоянии 1400 м. Моделирование проводилось с учетом взаимодействия снарядов со стволом, технологических отклонений канала ствола и теплового нагружения.



Разброс снарядов на расстоянии 1400 м

Расчеты показали, что с учетом рассматриваемых факторов среднее горизонтальное отклонение равно 0,16 м, а вертикальное – 0,18 м. Из таблицы стрельбы [9] известно, что среднее отклонение снарядов в горизонтальном направлении на дистанции 1400 м равно 0,7 м, а вертикальное – 0,6 м. Таким образом, колебания ствола вносят 23 % в горизонтальный и 30 % в вертикальный разброс.

Заключение

Разработанная математическая модель позволила оценить влияние колебаний ствола на кучность стрельбы. Установлено, что их вклад в рассеивание снарядов составляет 23 % по горизонтали и 30 % по вертикали. Полученные результаты могут быть применены для оптимизации конструкций стволов автоматических пушек.

Список литературы

1. Орлов, Б. В. Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий / Б. В. Орлов, Э. К. Ларман, В. Г. Маликов. – Москва : Машиностроение, 1976. – 432 с.
2. Богомолов, С. Н. Влияние колебаний ствола автоматической пушки на кучность стрельбы / С. Н. Богомолов, Н. Д. Федянин, М. А. Филиппов // Научный резерв. – 2018. – № 1 (1). – С. 13–20.
3. Stivnický M, Lisý P. Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits // Adv. Mil. Technol. June 2013. 8 (issue 1). P. 89-102.
4. Благонравов А. А. Основания проектирования автоматического оружия. – М. : Оборонгиз, 1940. – 485 с.
5. Клюкин, Д. А. Математическое моделирование теплового нагружения ствола артиллерийского орудия при выстреле. Выставка инноваций – 2022 (весенняя сессия). – Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. – С. 176–182. – DOI 10.22213/ie022124.
6. Хоменко, Ю. П. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах / Ю. П. Хоменко, А. Н. Ищенко, В. З. Касимов. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. – 256 с.
7. Клюкин, Д. А. Математическое моделирование теплового нагружения ствола артиллерийского орудия при выстреле // Выставка инноваций – 2022 (весенняя сессия) : сборник материалов XXXIII Республиканской выставки-сессии студенческих инновационных проектов. Ижевск. 29 апреля 2022 года. – Ижевск : Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, 2022. – С. 176–182. – DOI: 10.22213/ie022124.
8. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем. – Москва : Наука, 1971. – 553 с.
9. Копыл, В. Ф. Правила стрельбы из стрелкового оружия и боевых машин. – Москва : Воениздат, 1992. – 208 с.

О гравитационном взаимодействии тел

С. В. Корляков, В. Ф. Шадрин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Работа посвящена доказательству линейности изменения ускорения свободного падения внутри Земли. Рассмотрены случаи гравитационного взаимодействия материальной точки с тонким кольцом, диском, шаром и сферической оболочкой. Приведенные примеры могут быть использованы в качестве учебных задач для студентов технических специальностей.

Ключевые слова: ускорение свободного падения, сила тяжести, материальная точка.

В курсах школьной и вузовской физики встречаются задачи о движении материальной точки внутри Земли. При этом дается указание: ускорение свободного падения принять изменяющимся линейно от g_0 на поверхности Земли до нуля в ее центре, т. е.

$$g = g_0 \frac{r}{R}, \quad (1)$$

где $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$; r – радиус расположения точки, м; R – радиус Земли, м.

Обоснование этому указанию является достаточно сложным и приводится в вузовских курсах специальных дисциплин, например [1]. В данной работе предлагается более простое решение, доступное пониманию среднего студента. Для этого рассмотрим несколько задач: о притяжении материальной точки к тонкому кольцу, диску, шару и о гравитационном взаимодействии сферической оболочки с находящейся внутри нее материальной точкой.

1. Тонкое кольцо

Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо массой M и радиусом r . По оси x кольца на расстоянии h от него расположена материальная точка A массой m (рис. 1). Выделим на кольце элементарную массу dM :

$$dM = \frac{M}{2\pi r} \cdot r \cdot d\mu = \frac{M}{2\pi} \cdot d\mu.$$

Элемент кольца и точка будут притягиваться согласно закону всемирного тяготения силой dF :

$$dF = \frac{\gamma m \cdot dM}{r^2 + h^2} = \frac{\gamma m M \cdot d\mu}{2\pi(r^2 + h^2)},$$

где $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

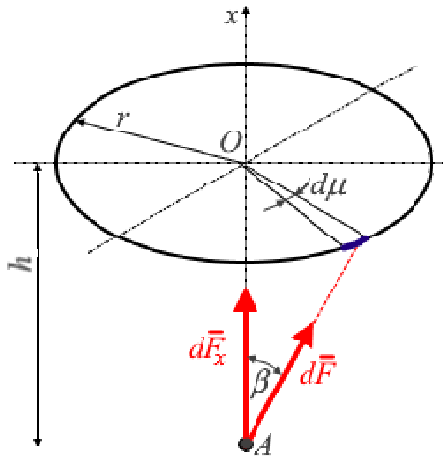


Рис. 1. К расчету взаимодействия точки с кольцом

Ввиду симметрии задачи нас интересует только осевая составляющая силы:

$$dF_x = dF \cdot \cos \beta = \frac{\gamma m M \cdot \cos \beta}{2\pi(r^2 + h^2)} \cdot d\mu. \quad (1)$$

Интегрируя выражение (1) по углу μ , изменяющемуся в пределах от 0 до 2π , получим

$$F_x = \frac{\gamma m M \cdot \cos \beta}{2\pi(r^2 + h^2)} \cdot \int_0^{2\pi} d\mu = \frac{\gamma m M \cdot \cos \beta}{r^2 + h^2} = \frac{\gamma m M h}{(r^2 + h^2)^{1,5}}. \quad (2)$$

Для удобства интерпретации результатов введем в рассмотрение безразмерное расстояние p от точки до плоскости кольца: $p = h / r$. Тогда (2) примет вид

$$F_x = \frac{\gamma m M}{r^2} \cdot \frac{p}{(1 + p^2)^{1,5}}. \quad (3)$$

Оценим влияние на силу тяжести расстояния p . Поделив выражение (3) на комплекс $\frac{\gamma m M}{r^2}$, получим «безразмерную» силу тяжести

$$\Phi = \frac{F_x}{\gamma m M / r^2} = \frac{p}{(1 + p^2)^{1,5}}. \quad (4)$$

Очевидно, что Φ обращается в ноль при $p = 0$ (точка совпадает с центром кольца) и при $p = \infty$ (точка удалена от кольца в бесконечность). Для нахождения экстремума дифференцируем (1.4) и приравниваем результат нулю, после чего получаем положение экстремума $p = \sqrt{2} / 2 \approx 0,71$ и сам экстремум:

$$\Phi(0,71) = \frac{0,71}{(1 + 0,71^2)^{1,5}} \approx 0,38.$$

График зависимости (4) приведен на рис. 2.

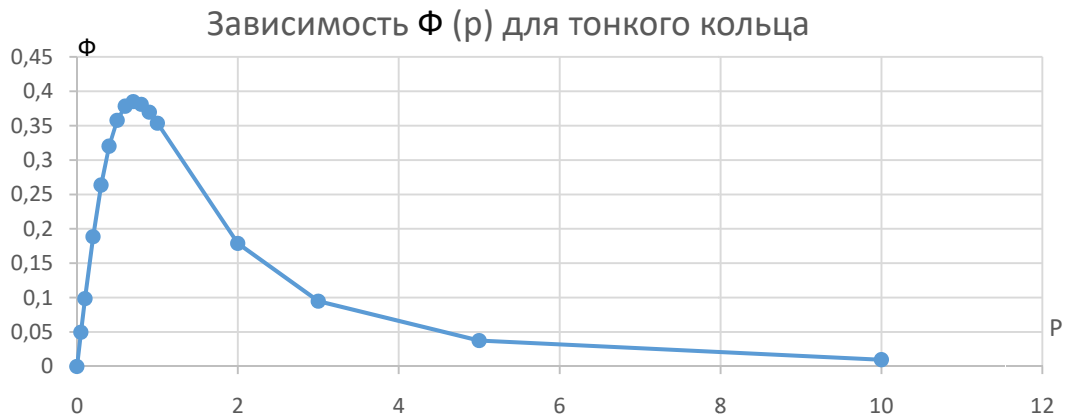


Рис. 2. Зависимость силы тяжести от расстояния между кольцом и точкой

2. Тонкий кольцевой (сплошной) диск

Дан тонкий диск массой M , радиусами внешнего и внутреннего контуров R и R_0 . По оси x диска на расстоянии h от него в положении A находится точка массой m (рис. 3). Найдем силу притяжения точки к диску.

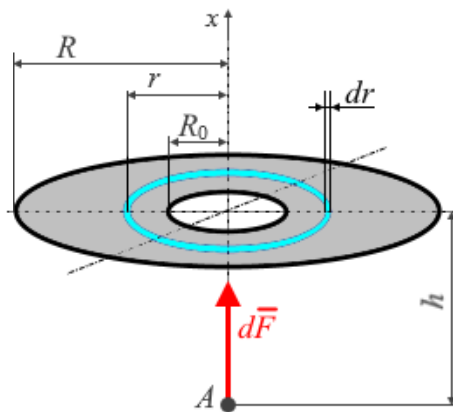


Рис. 3. К расчету тонкого диска

Выделим на диске бесконечно тонкое кольцо радиусом r и толщиной dr .

Его элементарная масса составит $dM = \frac{M}{\pi(R^2 - R_0^2)} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2M}{R^2 - R_0^2} \cdot r \cdot dr$.

Сила притяжения к такому кольцу согласно выражению (2) составит

$$dF = \frac{\gamma m \cdot dM \cdot h}{(r^2 + h^2)^{1.5}} = \frac{2\gamma m M h}{R^2 - R_0^2} \cdot \frac{r \cdot dr}{(r^2 + h^2)^{1.5}}.$$

Соответственно, сила притяжения к диску составит

$$F = \int dF = \frac{2\gamma m M h}{R^2 - R_0^2} \cdot \int_{R_0}^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + h^2)^{1.5}} \quad (5)$$

Возьмем интеграл, входящий в (5):

$$\int_{R_0}^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + h^2)^{1.5}} = \frac{1}{2} \int_{R_0}^R \frac{d(r^2 + h^2)}{(r^2 + h^2)^{1.5}} = \frac{-1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Big|_{R_0}^R = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Теперь выражение (5) принимает вид:

$$F = \frac{2\gamma m M h}{R^2 - R_0^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + h^2} - \sqrt{R_0^2 + h^2}}{\sqrt{(R^2 + h^2)(R_0^2 + h^2)}}. \quad (6)$$

А теперь снова перейдем к «безразмерному» расстоянию $p = h/R$ и разделим выражение (6) на комплекс $\frac{\gamma m M}{R^2}$, в результате получим «безразмерную» силу тяжести:

$$\Phi = \frac{F}{\gamma m M / R^2} = \frac{2p}{1 - \frac{R_0^2}{R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + p^2} - \sqrt{\frac{R_0^2}{R^2} + p^2}}{\sqrt{(1 + p^2)\left(\frac{R_0^2}{R^2} + p^2\right)}}. \quad (7)$$

Оценим величину силы Φ на границах. При $p = 0$ сила Φ обращается в ноль, что естественно (точка находится в центре кольца, где все силы притяжения уравновешиваются). При $p = \infty$ выражение (7) превращается в неопределенность типа ∞/∞ . Раскроем ее:

$$\begin{aligned} \Phi(\infty) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p}{1 - \frac{R_0^2}{R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + p^2} - \sqrt{\frac{R_0^2}{R^2} + p^2}}{\sqrt{(1 + p^2)\left(\frac{R_0^2}{R^2} + p^2\right)}} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2p^2 \left(\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{p^2} \cdot \frac{R_0^2}{R^2} + 1} \right)}{p^2 \sqrt{\left(\frac{1}{p^2} + 1\right)\left(\frac{1}{p^2} \cdot \frac{R_0^2}{R^2} + 1\right)}} = \frac{2(1-1)}{1} = 0. \end{aligned}$$

Из формул (6) и (7) для кольцевого диска после принятия $R_0 = 0$ получаются аналогичные формулы для сплошного диска:

$$F_{\text{спл}} = \frac{2\gamma m M}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right). \quad (8)$$

$$\Phi_{\text{спл}} = 2 \left(1 - \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right). \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что на бесконечном удалении точки от сплошного диска силы притяжения обращаются в ноль. А вот на поверхности диска ($h = 0$, $p = 0$) силы притяжения отличны от нуля:

$$F_{\text{спл}}(0) = \frac{2\gamma mM}{R^2}; \quad \Phi_{\text{спл}}(0) = 2.$$

На рис. 4 приведены графики зависимостей $\Phi(p)$ согласно (7) для различных соотношений R_0/R . При $R_0/R = 0,999$ диск превращается практически в тонкое кольцо (график как на рис. 2). При уменьшении R_0/R сила притяжения растет, но всегда при попадании точки в центр кольца ($p = 0$) сила тяжести обнуляется. Исключение составляет случай сплошного диска, когда $R_0/R = 0$. В этом случае кольцевое отверстие (куда может «спрятаться» точка) отсутствует, и на поверхности диска $\Phi = 2$.

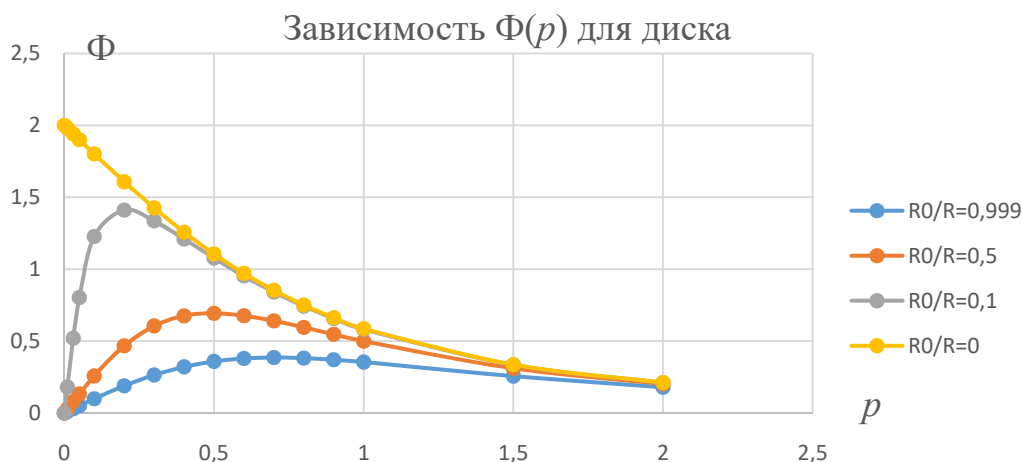


Рис. 4. Зависимость силы тяжести от расстояния между точкой и диском

3. Шар

Из школьной физики нам известно, что сила притяжения между шаром и точкой на его поверхности определяется как

$$F = \frac{\gamma mM}{R^2}, \quad (10)$$

где m , M – массы точки и шара; R – радиус шара. Хотя использование этой формулы также не обосновывается. Применим результаты, полученные в п. 2, для обоснования выражения (10).

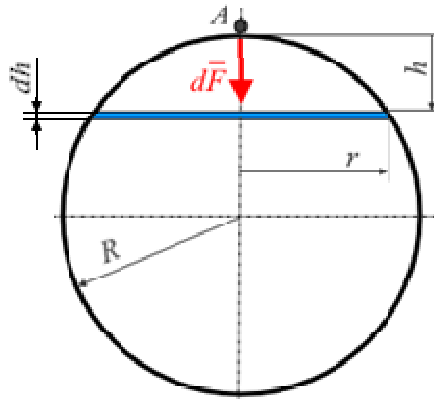


Рис. 5. К расчету шара

Вырежем в шаре (рис. 5) на глубине h от точки A элементарный диск радиусом r и массой dM . Элементарная сила dF притяжения к такому диску согласно (8) составит:

$$dF = \frac{2\gamma m \cdot dM}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right).$$

Выразим dM :

$$dM = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \pi r^2 \cdot dh = \frac{3Mr^2}{4R^3} \cdot dh.$$

Учитывая также, что

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2,$$

выражение для dF принимает вид:

$$dF = \frac{3\gamma mM}{2R^3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2R}}\right) \cdot dh.$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 до $2R$, получаем

$$\begin{aligned} F &= \frac{3\gamma mM}{2R^3} \cdot \int_0^{2R} \left(1 - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2R}}\right) \cdot dh = \frac{3\gamma mM}{2R^3} \cdot \left(h - \frac{1}{\sqrt{2R}} \cdot \frac{h^{1.5}}{1.5}\right) \Big|_0^{2R} = \\ &= \frac{3\gamma mM}{2R^3} \cdot \left(2R - \frac{2}{3} \cdot \frac{2R \cdot \sqrt{2R}}{\sqrt{2R}}\right) = \frac{3\gamma mM}{2R^3} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{\gamma mM}{R^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили (3.1).

4. Сферическая оболочка

Найдем силу тяжести, действующую на материальную точку массой m , размещенную произвольно внутри сферической оболочки, имеющей массу M и радиус R . Для упрощения задачи разрежем сферу на два сегмента (назовем их Малый и Большой) плоскостью BC , проходящей перпендикулярно радиусу OA (рис. 6). Очевидно, что результирующая сила тяжести получится алгебраическим сложением сил притяжения к малому и большому сегментам F_M и F_B .

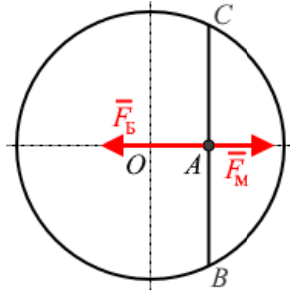


Рис. 6. Точка внутри сферы

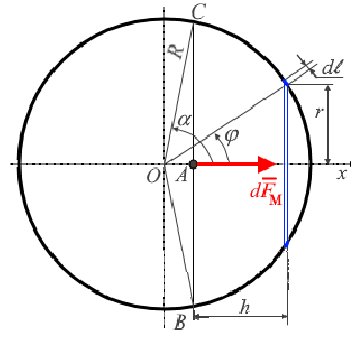


Рис. 7. К расчету малого сегмента

Рассмотрим малый сегмент (рис. 7). Рассечем сегмент двумя параллельными близлежащими плоскостями, перпендикулярными оси x и отстоящими от точки A на расстояние h – в результате получим тонкое кольцо радиусом r и шириной dl . Элементарная масса этого кольца будет пропорциональна его площади, т. е.:

$$dM = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dl = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi = \frac{M}{2} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi. \quad (11)$$

Элементарная сила притяжения точки A к этому кольцу согласно (2) будет:

$$dF_M = \gamma m \cdot dM \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1.5}}. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$r = R \sin \varphi; \quad h = R \cos \varphi - R \cos \alpha; \quad r^2 + h^2 = R^2 (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi),$$

теперь (12) с учетом (11) примет вид:

$$\begin{aligned} dF_M &= \gamma m \cdot \frac{M}{2} \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \frac{R(\cos \varphi - \cos \alpha)}{R^3 (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1.5}} = \\ &= \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi)^{1.5}}. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение по углу φ , получаем

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \int_0^\alpha \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi)^{1.5}} = \\ &= \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \int_0^\alpha \frac{(\cos \varphi - \cos \alpha) \cdot d(\cos \varphi)}{(1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \cos \varphi)^{1.5}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь делаем замену переменной: $\cos \alpha = a$; $\cos \varphi = t$. Тогда интеграл в (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\cos \alpha - \cos \varphi) \cdot d(\cos \varphi)}{(1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1.5}} = \int \frac{(a - t) \cdot dt}{(1 + a^2 - 2at)^{1.5}} = \\ &= -\frac{1}{2a} \int \frac{(a - t) \cdot d(1 + a^2 - 2at)}{(1 + a^2 - 2at)^{1.5}} = \frac{1}{a} \int (a - t) \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2at}}\right). \end{aligned}$$

А теперь получившийся интеграл берем по частям:

$$I = \frac{a-t}{a\sqrt{1+a^2-2at}} - \frac{1}{a} \int \frac{d(a-t)}{\sqrt{1+a^2-2at}}. \quad (14)$$

Обозначим здесь второе слагаемое I_1 и «поборемся» с ним отдельно:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{d(a-t)}{\sqrt{1+a^2-2at}} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{d(1+a^2-2at)}{\sqrt{1+a^2-2at}} = \frac{\sqrt{1+a^2-2at}}{a^2}.$$

Тогда (14) приобретает вид:

$$I = \frac{a-t}{a\sqrt{1+a^2-2at}} - \frac{\sqrt{1+a^2-2at}}{a^2} = \frac{at-1}{a^2\sqrt{1+a^2-2at}}.$$

Теперь делаем обратную замену переменной и подставляем пределы:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\cos\alpha \cos\varphi - 1}{\cos^2\alpha \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cos\varphi}} \Big|_0^\alpha = \\ &= \frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha}} - \frac{\cos\alpha - 1}{\cos^2\alpha \sqrt{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha}} = \\ &= -\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha \sin\alpha} + \frac{1 - \cos\alpha}{\cos^2\alpha (1 - \cos\alpha)} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{aligned}$$

Окончательно для силы притяжения к малому сегменту получаем

$$F_M = \frac{\gamma mM}{2R^2} \cdot \frac{1 - \sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь большой сегмент (рис. 8). Аналогично вырезаем двумя плоскостями элементарное кольцо массой dM (см. (11)). Учитывая, что

$$r = R \sin\varphi; \quad h = R \cos\varphi + R \cos\alpha$$

имеем

$$r^2 + h^2 = R^2(1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \cos\varphi).$$

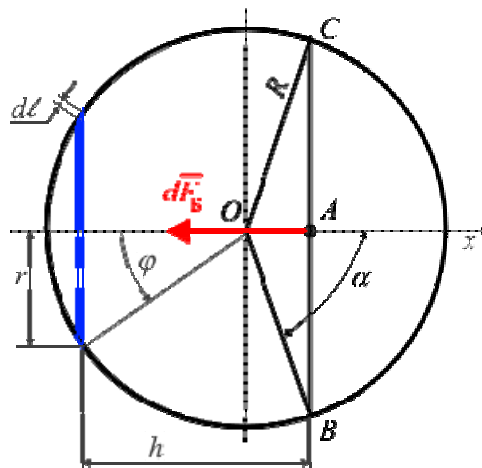


Рис. 8. К расчету большого сегмента

Выражение для элементарной силы dF_B примет теперь вид:

$$dF_B = \gamma m \cdot dM \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1,5}} = \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \frac{(\cos \alpha + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1,5}}.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем:

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \int_0^{\pi-\alpha} \frac{(\cos \alpha + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{(1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1,5}} = \\ &= -\frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \int_0^{\pi-\alpha} \frac{(\cos \alpha + \cos \varphi) \cdot d(\cos \varphi)}{(1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1,5}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь опять делаем замену переменной: $\cos \alpha = a$; $\cos \varphi = t$. Тогда интеграл в (16) принимает вид:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\cos \alpha + \cos \varphi) \cdot d(\cos \varphi)}{(1 + \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cos \varphi)^{1,5}} = \int \frac{(a + t) \cdot dt}{(1 + a^2 + 2at)^{1,5}} = \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{(a + t) \cdot d(1 + a^2 + 2at)}{(1 + a^2 + 2at)^{1,5}} = -\frac{1}{a} \int (a + t) \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + 2at}}\right). \end{aligned}$$

И снова получившийся интеграл берем по частям:

$$I = -\frac{a + t}{a\sqrt{1 + a^2 + 2at}} + \frac{1}{a} \int \frac{d(a + t)}{\sqrt{1 + a^2 + 2at}}. \quad (17)$$

Обозначаем второе слагаемое в (4.7) через I_1 и «боремся» с ним отдельно:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{d(a + t)}{\sqrt{1 + a^2 + 2at}} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{d(1 + a^2 + 2at)}{\sqrt{1 + a^2 + 2at}} = \frac{\sqrt{1 + a^2 + 2at}}{a^2}.$$

Теперь (17) принимает вид

$$I = -\frac{a + t}{a\sqrt{1 + a^2 + 2at}} + \frac{\sqrt{1 + a^2 + 2at}}{a^2} = \frac{1 + at}{a^2\sqrt{1 + a^2 + 2at}}.$$

Далее делаем обратную замену переменных и подстановку пределов:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1 + at}{a^2\sqrt{1 + a^2 + 2at}} = \frac{1 + \cos \alpha \cos \varphi}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \varphi + 2 \cos \alpha \cos \varphi}} \Big|_0^{\pi - \alpha} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}} - \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha}} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} - \frac{1 + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Окончательно для силы F_B получаем:

$$F_{\text{б}} = -\frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot I = \frac{\gamma m M}{2R^2} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (18)$$

Сравнивая (18) и (15), видим, что силы $F_{\text{б}}$ и $F_{\text{м}}$ равны. То есть точка внутри сферической оболочки находится в невесомости!

Заключение

Таким образом, точка, расположенная внутри Земли (рис. 9), притягивается только к ядру, поскольку все вышележащие слои можно рассматривать как набор сферических оболочек, не оказывающих влияния на точку.

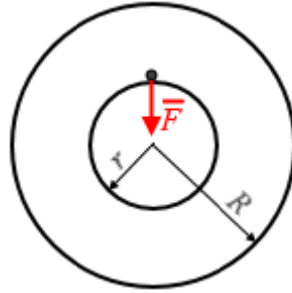


Рис. 9. К расчету силы тяжести внутри Земли

Расписав массу ядра $M_{\text{я}}$ через массу Земли $M_{\text{з}}$ и радиусы r и R :

$$M_{\text{я}} = \frac{M_{\text{з}}}{4\pi R^3 / 3} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = M_{\text{з}} \cdot \frac{r^3}{R^3},$$

для силы тяжести в произвольной точке получим

$$F = \frac{\gamma m M_{\text{я}}}{r^2} = \frac{\gamma m}{r^2} \cdot M_{\text{з}} \cdot \frac{r^3}{R^3} = m \cdot \frac{\gamma M_{\text{з}}}{R^2} \cdot \frac{r}{R} = m g_0 \cdot \frac{r}{R}.$$

То есть сила тяжести зависит от радиуса расположения линейно!

Список литературы

1. Пантелеев, В. Л. Физика Земли и планет: Курс лекций. – Москва : Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001. – 116 с.

Разработка математической модели термоупругопластического деформирования при высокотемпературной термомеханической обработке винтовым обжатием

А. М. Липанов^{1,2}, В. Б. Дементьев^{2,3}, К. Г. Волков³

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,

² Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,

³ Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН

Выполнен анализ процесса высокотемпературной термомеханической обработки винтовым обжатием. Представлена математическая модель термоупругопластического деформирования для определения напряженно-деформированного состояния заготовки после обработки винтовым обжатием в режиме высокотемпературной термомеханической обработки.

Ключевые слова: винтовое обжатие, напряженно-деформированное состояние, термоупругопластическое деформирование.

Введение

Термомеханическая обработка (ТМО) материалов обладает обширным применением в различных видах. В производстве используются многочисленные схемы ТМО и соответствующее оборудование. Обширное применение данная технология получила вследствие значительных возможностей по получению высококачественных изделий с повышенными механическими свойствами [1]. Значительные успехи по получению калиброванных осесимметричных стальных изделий с повышенными прочностными, пластическими и эксплуатационными свойствами достигнуты применением высокотемпературной термомеханической обработки (ВТМО) винтовым обжатием (ВО). Согласно данным, приведенным в [2, 3], внедрение ВТМО ВО в технологические процессы металлургических и металлообрабатывающих предприятий позволяет получать заготовки и изделия с повышенными свойствами: на 8–10 % большим пределом прочности и σ_B , на 7–9 % большим условным пределом текучести $\sigma_{0,2}$, на 10–15 % большим относительным удлинением δ и до двух раз большей долговечностью для отдельных видов изделий. Помимо этого, появляется возможность сократить количество операций в технологическом процессе за счет объединения калибровки и термообработки в ВТМО ВО. Однако, на данный момент до конца не изучены процессы, протекающие при винтовом обжатии в режиме ВТМО. Особого внимания в данном случае требуют вопросы напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом температурного воздействия. Именно особенности НДС при закалке в данном процессе позволяют получать повышенные свойства материалов. Следовательно, целью работы является разработка математической модели термоупругопластического

деформирования (ТУПД) при высокотемпературной термомеханической обработке винтовым обжатием. Результаты проведенных исследований позволят повысить возможности внедрения ВТМО ВО в производственные процессы за счет прогнозируемости выходных параметров материала.

Математическое описание модели

Разработка математической модели ТУПД была основана на высокотемпературной термомеханической обработке осесимметричной полнотелой заготовки. Схема исследуемого процесса представлена на рис. 1

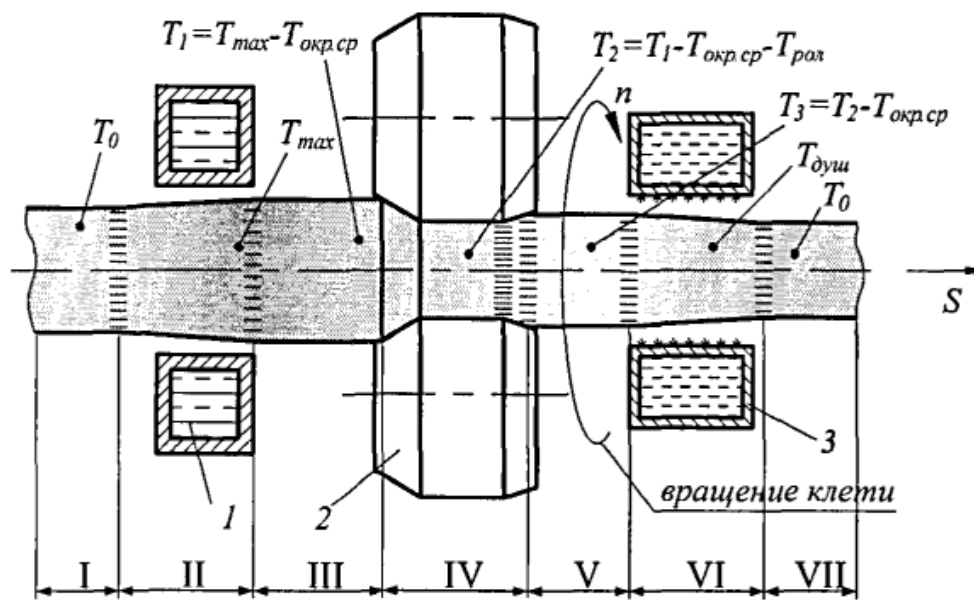


Рис. 1. Схема ВТМО ВО:

1 – индуктор; 2 – деформирующий узел; 3 – спрейер

Для анализа процесса и определения граничных условий представленная на рис. 1 схема была разбита на три фазы. В первой фазе рассматривался индукционный нагрев заготовки. Во второй фазе оценивалась деформация стального прутка с допущением о сохранении температурного поля с предыдущей фазы. В третьей фазе определялось принудительное охлаждение в спрейерном устройстве с применением подхода, при котором на поверхности заготовки задавалась тонкая оболочка с постоянной температурой.

Моделирование процесса ВТМО ВО осесимметричной заготовки сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных, составленных в соответствии с [4] и имеющих вид для цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} K_{rr} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{2} r K_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{K_{\theta\theta}}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + q = 0, \\ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\tau_{rz}}{dz} - \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{d_r} - (3\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} (\alpha_m T) = 0, \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{d\tau_z}{dz} - \frac{\tau_{rz}}{r} - (3\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} (\alpha_m T) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $K_{rr}, K_{zz}, K_{\theta\theta}$ – коэффициенты теплопроводности в направлениях r и z , (Вт/м · К); φ – полевая функция, определяющая температуру тела; θ – угол, рад.; r – радиус заготовки, м; q – плотность теплового потока, Вт/м²; α_T – коэффициент линейного расширения, К⁻¹; T – температура тела, К; σ_r и σ_φ – радиальные и окружные напряжения соответственно, Па; τ_{rz} и τ_z – касательные напряжения, Па; λ – коэффициент Ляме; μ – коэффициент Пуассона.

Для применения численных методов решения представленной системы (1) выполнено преобразование исходной задачи в систему алгебраических уравнений относительно узловых значений по методу Бубнова-Галеркина:

$$\begin{cases} \left([K_i] + \frac{2}{\Delta t} [C_i] \right) \{ \Phi_i \}^* = \frac{2}{\Delta t} [C_i] \{ \Phi_i \}_{\text{стар}} - \{ \Psi_i \}^*; \\ [K_j] \{ \delta_j \} + [C_j] \{ \dot{\delta}_j \} + [M_j] \{ \ddot{\delta}_j \} + \{ F_j \} - \{ R_j \} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $i = \begin{cases} 1, \text{ для фазы индукционного нагрева,} \\ 2, \text{ для фазы пластической деформации,} \\ 3, \text{ для фазы охлаждения в спреюре;} \end{cases}$

$j = \begin{cases} 1, \text{ для заготовки,} \\ 2, \text{ для деформирующего инструмента,} \\ 3, \text{ для оснастки;} \end{cases}$

$[K_i]$ – матрица теплопроводности; $[C_i]$ – матрица демпфирования; $\{ \Phi_i \}^*$ – множество узловых значений; $\{ \Psi_i \}^*$ – вектор тепловой нагрузки; $[K_j]$ – матрица жесткости; $[C_j]$ – матрица сопротивления движению; $[M_j]$ – матрица масс; $\{ \delta_j \}, \{ \dot{\delta}_j \}, \{ \ddot{\delta}_j \}$ – перемещение, скорость и ускорение узла соответственно; $\{ F_j \}$ – вектор нагрузки; $\{ R_j \}$ – вектор сосредоточенных узловых сил.

Исходные данные, использованные для выполнения расчетов, представлены в таблице.

Исходные данные

d_n , мм	d_k , мм	T , К	λ , %	S , мм/об	d_p/d_k	n_1	n_2	L_k
26,56	25	1243	5,87	4,5	4,5	3	3	4,5

d_n – начальный диаметр заготовки; d_k – конечный диаметр заготовки; T – температура деформации; λ – степень деформации; S – продольная подача заготовки; d_p – диаметр деформирующего ролика; n_1 – количество единичных обжатий; n_2 – количество единичных калибровок; L_k – длина калибрующего участка инструмента

Результаты

В результате расчетов были получены поля остаточных напряжений после операции ВТМО ВО, представленные на рис. 2.

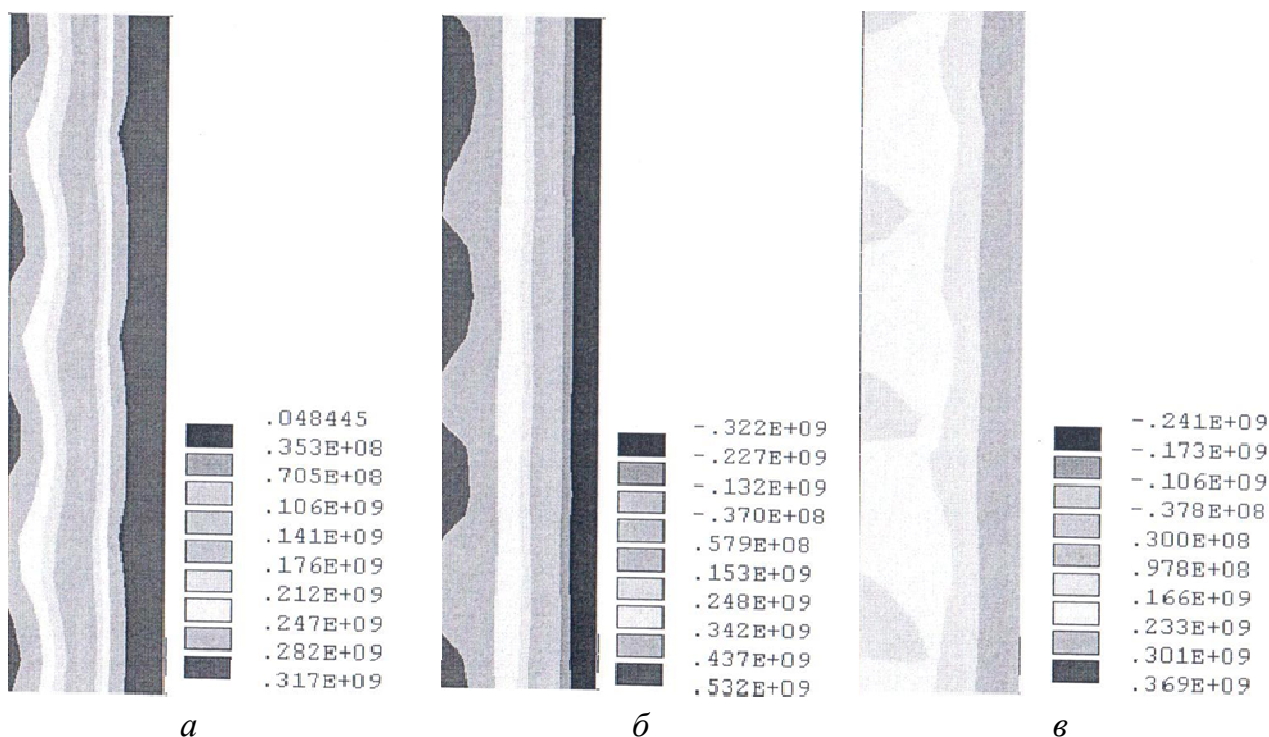


Рис. 2. Поля остаточных напряжений: *a* – поле интенсивности напряжений, Па; *б* – поле радиальных напряжений, Па; *в* – поле осевых напряжений, Па

Как видно из рис. 2, радиальные и осевые остаточные напряжения после ТУПД обладают максимальной интенсивностью у приграничного слоя и распространяются по винтовой линии. Последующие слои обладают меньшими значениями, а расположены они параллельно оси заготовки. Однако в выполненной работе не проведены исследования влияния фазовых переходов, что делает необходимым проведение дополнительных исследований и выявления связи между структурно-фазовыми превращениями в напряженно-деформированном состоянии после винтового обжата в режиме ВТМО.

Заключение

В работе проведен анализ процесса высокотемпературной термомеханической обработки винтовым обжатием и составлена математическая модель, позволяющая определить напряженно-деформированное состояние заготовки под влиянием термоупругопластического деформирования. Выявлены количественные значения остаточных напряжений и характер их распространения.

Список литературы

1. Исследование влияния высокотемпературной термомеханической обработки на структуру, технологические, механические и коррозионные свойства высокопрочной коррозионностойкой стали переходного класса с повышенным содержанием азота / О. А. Тоньшева, Н. М. Вознесенская, А. Б. Шалькевич, А. Ф. Петраков // *Авиационные материалы и технологии*. – 2012. – № 3 (24). – С. 31–36.
2. Сухих, А. А. Упрочнение толстостенных труб высокотемпературной термомеханической обработкой с градиентным по толщине стенки отпуском / А. А. Сухих, В. Б. Дементьев, Т. М. Махнева // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2022. – Т. 24, № 2. – С. 228–237. – DOI 10.15350/17270529.2022.2.18.

3. *Дементьев, В. Б.* Раскрытие резервов существующих материалов на основе ВТМО винтовым обжатием / В. Б. Дементьев, А. М. Липанов // *Механика деформируемого твердого тела в проектировании материалов и конструкций : Программа и тезисы докладов, Пермь, 07–08 ноября 2024 года.* – Пермь: Пермский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 2024. – С. 22–23.

4. *Щенятский, А. В.* Влияние режимов обработки на распределение деформации сдвига по контактному очагу при ВТМО ВО / А. В. Щенятский, В. Б. Дементьев, М. М. Абашев // *Технологическое обеспечение надежности и долговечности машин : сборник научных трудов.* – Ижевск : Институт механики Уральского отделения РАН, 2006. – С. 29–32.

Методы и алгоритмы ускорения расчетов прямой и обратной задачи фильтрации при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин

Д. Н. Майков^{1,2}, С. С. Макаров¹

¹Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН,
²ООО «Сиам Мастер»

В работе представлены методы и алгоритмы ускорения расчетов прямой и обратной задачи фильтрации флюида, используемых при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин. Рассмотренные решения позволяют существенно сократить время вычислений без потери точности за счет применения аппроксимации, модификации численных схем и оптимизационных алгоритмов. Приведена расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин.

Ключевые слова: гидродинамические исследования скважин, уравнение пьезопроводности, прямая и обратная задача, ускорение вычислений, математическая модель.

Введение

При оценке эксплуатационных характеристик продуктивных пластов нефтегазовых месторождений применяются гидродинамические исследования скважин (ГДИС). Неоднородность пластов накладывает высокие требования к точности и оперативности интерпретации данных ГДИС. Особенно это важно при переменных режимах работы скважин, сложной геометрии стволов, наличия трещин автоматического гидравлического разрыва пласта (автоГРП) и двойной пористости пластов.

Традиционные аналитические и численные методы решения задач фильтрации часто требуют значительных вычислительных затрат, что усложняет их использование на практике. Особенно трудоемкими являются обратные задачи, для решения которых необходимо многократно проводить расчеты систем уравнений.

Таким образом, разработка математических моделей, методов и алгоритмов, позволяющих ускорить расчеты при сохранении точности, является актуальной научной задачей. Такие решения позволят повысить эффективность интерпретации ГДИС, а также оптимизировать проектирование и эксплуатацию скважин.

Методы ускорения расчетов прямой задачи фильтрации

Методы ускорения вычислений прямой задачи фильтрации флюида при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин приведены в работах [1–4].

Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины приведен в [2]. Метод основан на аналитическом решении уравнений, описывающих изменения параметров при фильтрации флюида при моделировании скважин с изменяющимися режимами работы. Идея предлагаемого метода заключается в применении аппроксимации аналитической функции изменения давления в скважине и использовании ее при расчете давления по принципу суперпозиции. Аппроксимация функции изменения давления полиномами приведена на рис. 1.

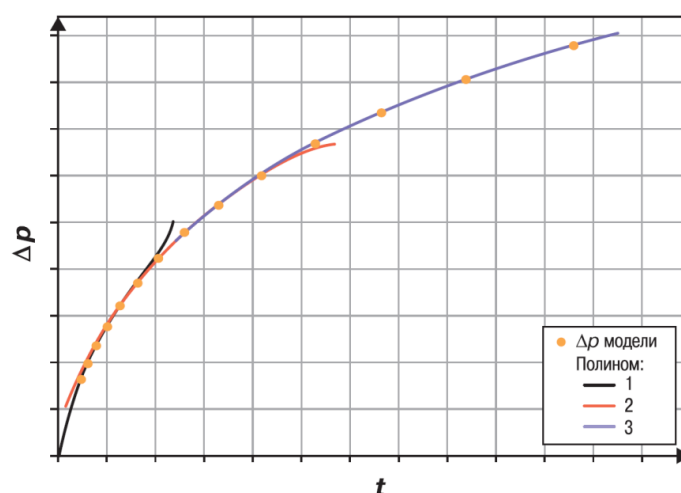


Рис. 1. Аппроксимация функции перепада давления полиномами

Рис. 1 демонстрирует качественное поведение функции изменения давления и ее аппроксимацию полиномами на расчетном интервале (размерности и значения на осях опущены). Каждый рассчитанный полином, описывающий группу выделенных точек, вписывается в общее решение.

Результаты численного анализа приведены в таблице [2].

Результаты численного анализа предлагаемого метода ускорения, [2]

Моделируемая скважина	Время расчета		Среднее квадратичное отклонение, %
	Базовый, с	Предложенный, с	
Вертикальная	1,972	0,417	$7,543 \cdot 10^{-9}$
Горизонтальная	557,130	0,471	$2,114 \cdot 10^{-3}$
Горизонтальная с МГРП	1201,110	0,548	$2,385 \cdot 10^{-6}$

Из таблицы видно, что применение разработанного метода позволяеткратно увеличить скорость расчетов при минимальных погрешностях. Время

расчетов в примере с горизонтальной скважиной сократилось с 557 до 0,471 секунды, при этом среднее квадратичное отклонение составило 0,002 %.

Метод ускорения численного решения дифференциального уравнения пьезопроводности модели пласта с двойной пористостью приведен в работе [3].

Метод основан на преобразовании системы дифференциальных уравнений модели двойной пористости Уоррена – Рута с использованием комплексных параметров: удельного коэффициента проводимости λ , доли трещинно-кавернозной емкости ω и объемной средней проницаемости системы трещин k_{fb} .

На диагностическом графике Бурде (см. рис. 2) показано сопоставление результатов расчета изменения давления в скважине, полученных с использованием предлагаемого метода ускоренного численного решения для модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью Уоррена – Рута, с аналитическим решением [1].

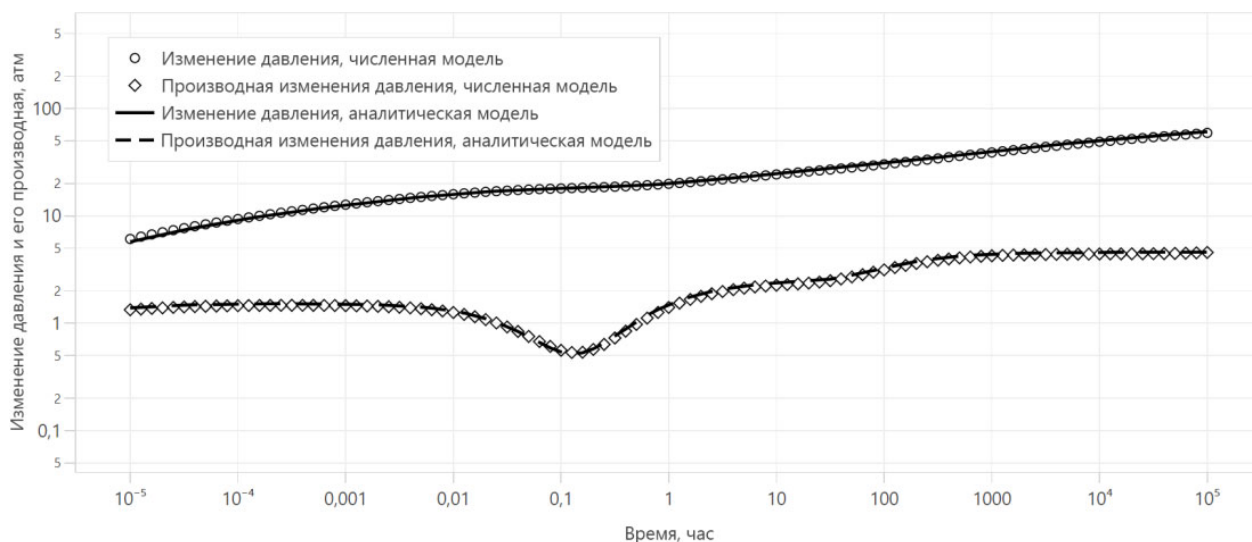


Рис. 2. Изменение давления в многозабойной скважине в пласте с двойной пористостью Уоррена – Рута

Из рис. 2 видно, что численное решение хорошо согласуется с аналитическим, погрешность на начальном временном интервале обусловлена недостаточной детализацией сетки вблизи забоев скважин.

Использование предложенного метода позволило сократить время расчетов в 2 раза по сравнению с традиционным подходом при сохранении точности вычислений.

Алгоритм ускорения расчетов обратной задачи фильтрации

Алгоритм решения обратной коэффициентной задачи модели фильтрации, основанной на уравнении пьезопроводности, с использованием методов оптимизации приведен в работе [5]. В алгоритме предложены дополнения к алгоритмам оптимизации, направленные на ускорение вычислительных операций при решении уравнения пьезопроводности. В частности, были моди-

фицированы два известных в литературе алгоритма, описывающих метод Левенберга – Марквардта, следующим образом:

- 1) добавлена возможность выбора обновления главной диагонали матрицы Гессе по стратегии Левенберга либо по стратегии Марквардта;
- 2) добавлена возможность замены расчета матрицы Якоби ее оценкой методом Бройдена на каждой n -й итерации;
- 3) добавлены границы поиска параметров. При каждом расчете функции на вход расчета подаются обернутые функцией закливания параметры. Данный подход используется каждый раз при расчете вектора вычисленных значений и матрицы Якоби.

Результаты численного исследования предложенного алгоритма, в виде усредненных значений оцениваемых показателей, приведены на рис. 3.

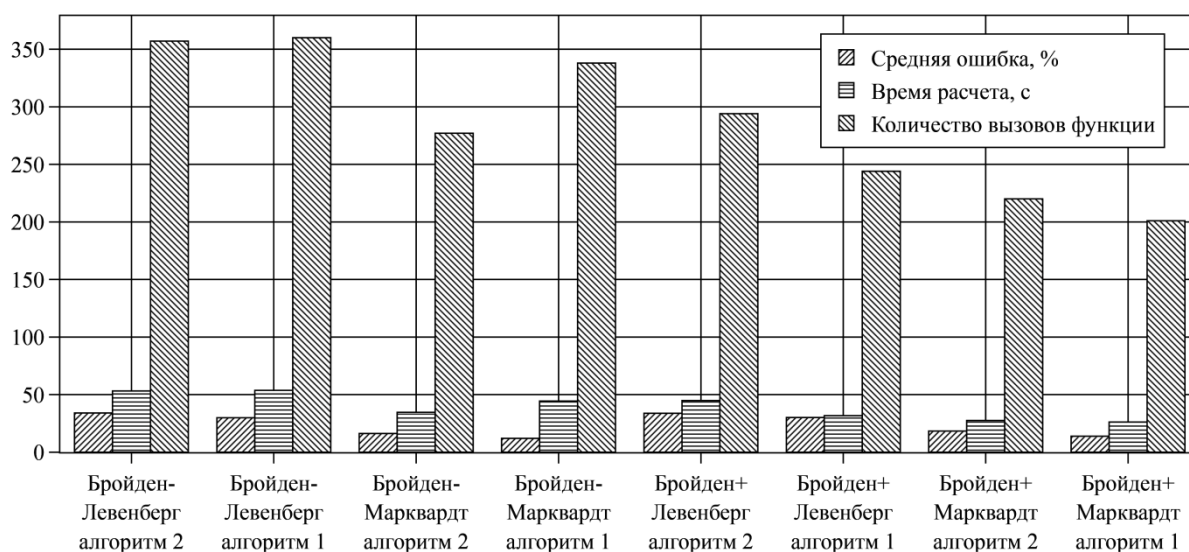


Рис. 3. Результаты расчетов вариаций алгоритма ЛМ

На рис. 3 по оси абсцисс первая строка Бройден –/+ соответствует неприменение/применение метода Бройдена при расчете матрицы Якоби, вторая строка обозначает метод обновления главной диагонали матрицы Гессе, третья строка обозначает использование модифицированного алгоритма.

Из рис. 3 видно, что стратегия обновления главной диагонали Гессе по Марквардту увеличивает точность оптимизации в среднем в 2,1 раза и сокращает количество вызовов функции расчета дебитов на 17,5 %, а время расчетов на 27,6 %. Использование метода Бройдена сокращает количество вызовов функции расчета дебитов на 28 %, время расчетов на 29,8 %, но средний результат ошибки вырос на 4 %.

Математическая модель вертикальной скважины с трещиной автоГРП

Математическая модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта, позволяющая учесть влияние изменения полудлины трещины от времени при интерпретации результатов ГДИС, приведена в работе [6]. Модель основана на уравнении трещины бесконечной прово-

димости, принципе суперпозиции для описания изменения параметров трещины во времени и полученной оригинальной зависимости изменения полудлины трещины от времени.

Верификация полученной модели проводилась на основе данных исследований ГДИС, в которых наблюдался эффект автоГРП. Результаты верификации показали, что рассчитанное давление по модели хорошо согласуется с результатами исследований ГДИС реальных скважин.

Результаты расчета изменения забойного давления в скважине по предложенной модели показано на диагностическом графике Бурде (см. рис. 4).

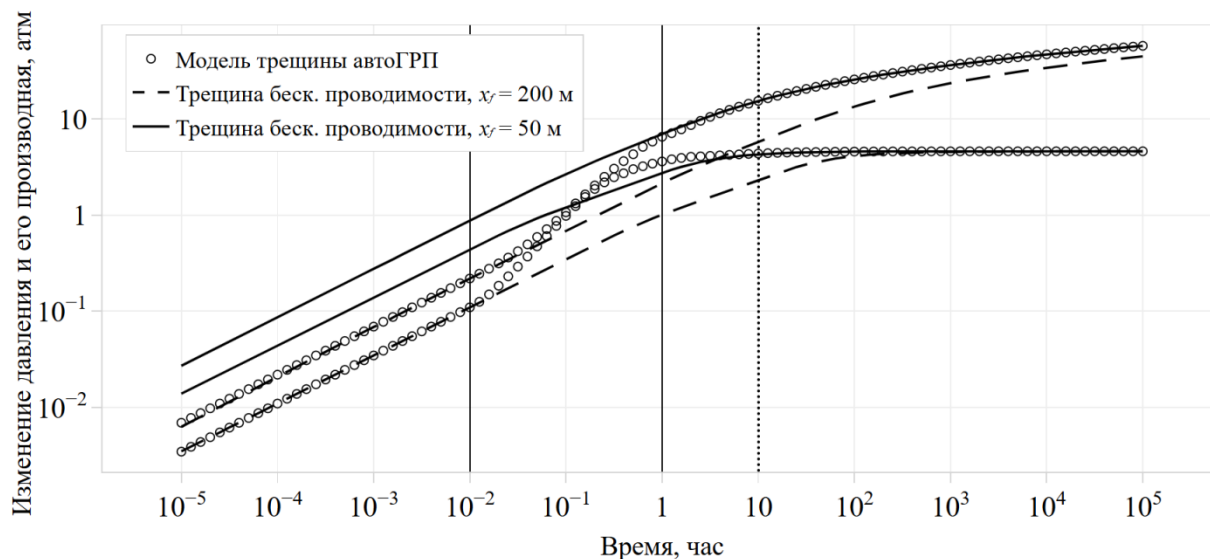


Рис. 4. Расчетное давление по модели трещины автоГРП

На диагностическом графике (рис. 4) отчетливо выделяются три этапа изменения трещины автоГРП: начальный этап, этап закрытия трещины и конечный этап. Начальный этап, в интервале времени $10^{-5} - 0.01$ ч, полностью соответствует расчету по модели трещины бесконечной проводимости с начальной полудлиной трещины $x_{fs} = 200$ м. Этап закрытия трещины $0,01 - 1$ ч, соответствует изменению полудлины трещины от начальной x_{fs} до конечной x_{fe} . Конечный этап $1 - 10^5$ ч. – расчет давления по модели трещины бесконечной проводимости с конечной полудлиной $x_{fe} = 50$ м, рассчитанной с учетом предыдущих изменений полудлины. Полное соответствие расчета с моделью трещины бесконечной при $x_{fe} = 50$ м наблюдается с 10 ч, это связано с применением принципа суперпозиции.

Заключение

В рассмотренных работах разработаны:

1) методы ускорения расчёта прямой задачи фильтрации флюида, позволяющие существенно сократить время вычислений без потери точности при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин с изменяющимися режимами работы и для модели пласта с двойной пористостью;

2) математическая модель вертикальной скважины с трещиной автоГРП для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин

с применением полученной оригинальной зависимости изменения полудлины трещины от времени;

3) алгоритм ускорения расчета обратной задачи фильтрации флюида, основанный на модификации метода Левенберга – Марквардта для решения уравнения пьезопроводности, позволяющий существенно сократить время вычислений и повысить точность интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин;

4) на основе разработанных методов и алгоритмов, позволяющих сократить время вычислительных операций, проведен параметрический анализ результатов ГДИС на типовых режимах работы скважин, установлены новые закономерности влияния параметров модели на результат эксплуатационных параметров скважин.

Список литературы

1. *Майков, Д. Н.* Параметрический анализ модели многозабойной скважины в пласте с двойной пористостью / Д. Н. Майков, С. С. Макаров // Вестник ТюмГУ. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2023. – Т. 9, № 3(35). – С. 100–116.

2. Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины / Д. Н. Майков, С. В. Исупов, С. С. Макаров, А. С. Аниканов // Нефтяное хозяйство. – 2021. – № 9. – С. 105–107.

3. *Майков, Д. Н.* Метод ускорения численного решения дифференциального уравнения пьезопроводности модели пласта с двойной пористостью / Д. Н. Майков, С. С. Макаров // Математическое моделирование и численные методы. – 2024. – № 3. – С. 3–17.

4. *Майков, Д. Н.* Аналитическая модель многозабойной скважины с полным вертикальным вскрытием пласта / Д. Н. Майков, С. Ю. Борхович // Нефть. Газ. Новации. – 2020. – № 11 (240). – С. 61–65.

5. *Майков, Д. Н.* Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин / Д. Н. Майков, С. С. Макаров // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 9. – С. 71–82.

6. *Майков, Д. Н.* Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин / Д. Н. Майков, С. В. Исупов, С. С. Макаров // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – Т. 29, № 1. – С. 92–109.

Моделирование изменения магнитных свойств тонких пленок*

А. Ю. Саломатина

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН

Исследовано влияние толщины α -Fe пленок (2–20 слоев) на магнитные свойства без внешнего поля. Обнаружено скачкообразное изменение модуля намагниченности, а также уменьшение магнитной энергии на атом с ростом толщины пленки. Для моделирования использовалась комбинация метода молекулярной динамики и модели спиновой динамики с потенциалом модифицированного метода погруженного атома.

Ключевые слова: спинтроника, математическое моделирование, молекулярная динамика, спиновая динамика, модифицированный метод погруженного атома.

Введение

Тонкопленочные покрытия являются одним из ключевых элементов современной микроэлектроники. Пленки находят широкое применение в микроэлектронике, оптоэлектронике и фотонике, а также в спинтронике [1], области, в которой манипуляция спином электрона используется для хранения и обработки информации. В настоящее время ведутся исследования спин-зависимых элементов памяти, спиновые транзисторы и логические компоненты на основе ферромагнитных, антиферромагнитных и других гетероструктур [2, 3].

В спинтронике критически важно изучать магнитные свойства материалов, особенно железа. Железо обладает высокой намагниченностью, достаточно плотной кристаллической решеткой и довольно низкой стоимостью, что делает его востребованным во многих областях [4, 5], например в медицине, материаловедении и катализе. В микроэлектронике многослойные структуры на основе Fe/Cr демонстрируют эффект гигантского магнитного сопротивления (GMR) [6], а наноккомпозиты FeCo сочетают высокую намагниченность насыщения и повышенную температуру Кюри, что подходит для элементов магнитной записи [7]. Тонкие пленки железа используются в магниторезистивной памяти (MRAM) [8], трековой памяти [9] и других спинтронных устройствах.

Это исследование продолжает серию предыдущих работ [10, 11] и направлено на выявление закономерностей формирования магнитных свойств при изменении толщины в нанометровом диапазоне. Задача актуальна для создания функциональных материалов с заданными магнитными характеристиками для применения в спинтронных устройствах, включая спиновые вентили, транзисторы и контакты Джозефсона [12].

© Саломатина А. Ю., 2025

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема №FUUE-2025-0001 «Моделирование и экспериментальные исследования структуры и магнитных параметров контакта Джозефсона из многослойной наноструктуры», № гос. регистрации 125020501412-9).

Математическое описание модели

Использованная в работе математическая модель включает в себя метод молекулярной динамики, необходимый для исследования движения атомов системы, а также модель спиновой динамики частиц, которая учитывает магнитные взаимодействия и спиновые эффекты. В рамках этой модели был использован программный комплекс LAMMPS [13] (Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator) с дополнительным пакетом LAMMPS SPIN, который значительно расширяет функциональные возможности основного программного обеспечения и позволяет учесть спиновую динамику. Такая совмещенная модель позволяет исследовать магнитоупругие явления и влияние дефектов структуры на магнитные характеристики материалов. Взаимодействия магнитных спинов как между собой, так и с решеткой, описываются в рамках многочастичного потенциала и обменного взаимодействия.

Описание модели осуществляется с помощью двух основных, связанных между собой уравнений, описывающих поведение атомов и их магнитных взаимодействий уравнения Ланжевена [14] и стохастического уравнения Ландау – Лифшица – Гилберта [15]:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial H^{\text{ex}}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_i} - \kappa \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\chi}(t), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{s}_i}{dt} = \frac{1}{(1+\lambda^2)} \left((\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\eta}(t)) \times \mathbf{s}_i + \lambda \mathbf{s}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) \right), \quad i=1,2,\dots,N, \quad (2)$$

где $U(\mathbf{r})$ – силовой потенциал; $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$ – совокупность всех радиус-векторов атомов системы; $H^{\text{ex}}(\mathbf{r})$ – энергия обменного взаимодействия спинов; κ – параметр силы вязкого трения; $\boldsymbol{\chi}(t)$ – белый шум, присутствующий в описании процессов движения атома; $\boldsymbol{\omega}_i$ – величина произведения гиромагнитного отношения на локальное магнитное поле; $\boldsymbol{\eta}(t)$ – белый шум, присутствующий в описании процессов поведения спинов атомов; λ – демпфирующий спиновый коэффициент.

В качестве силового потенциала $U(\mathbf{r})$ в работе используется модифицированный метод погруженного атома (МЕАМ) [16]. Потенциал основан на теории функционала электронной плотности и является многочастичным. Потенциал МЕАМ описывается следующим уравнением:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_i \left(F_i(\bar{\rho}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j,j \neq i} \phi_{ij}(r_{ij}) \right), \quad i=1,2,\dots,N \quad (3)$$

где F_i – функция погружения атома; $\bar{\rho}_i$ – фоновая электронная плотность; $\phi_{ij}(r_{ij})$ – функция парного потенциала; $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ – расстояние между двумя атомами с номерами i и j .

Хотя использование МЕАМ требует настройки множества параметров, этот метод имеет обширную базу данных для различных химических элементов, что делает его применение более удобным и актуальным в современной науке и технике.

Анализ результатов

Моделирование проводилось для тонкой пленки α -Fe с объемно-центрированной кубической (ОЦК) кристаллической решеткой с изменением количества атомных слоев от 2 до 20. Моделирование проводится при температуре $T = 300$ К и величине магнитного поля $\mathbf{B} = 0$ Тл. Граничные условия – периодические по осям x и y , фиксированные по оси z . Для достижения теплового равновесия используется динамика Ланжевена. В начальный момент времени расчета магнитные моменты атомов направлены случайным образом.

Расчеты проводились в течение временного интервала в 10 пс с шагом интегрирования 0,1 фс. В результате серии вычислительных экспериментов были получены значения магнитных характеристик для железных пленок различной толщины. На рис. 1 представлено распределение магнитных моментов атомов Fe в пленках толщиной: 2 атомных слоя ($\approx 0,58$ нм, рис. 1, а) и 20 атомных слоев ($\approx 5,78$ нм, рис. 1, б). На всех изображениях наблюдаются области с сонаправленными спиновыми магнитными моментами, однако четко выраженной доменной структуры не формируется. Полученные результаты указывают на ферромагнитный характер материала, однако отсутствие четко выраженной доменной организации, по-видимому, связано с отсутствием внешнего магнитного поля.

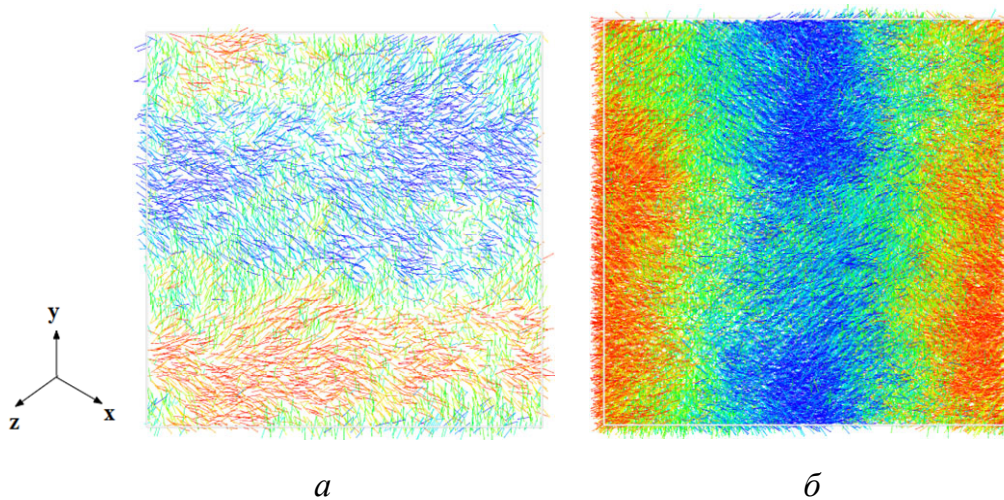


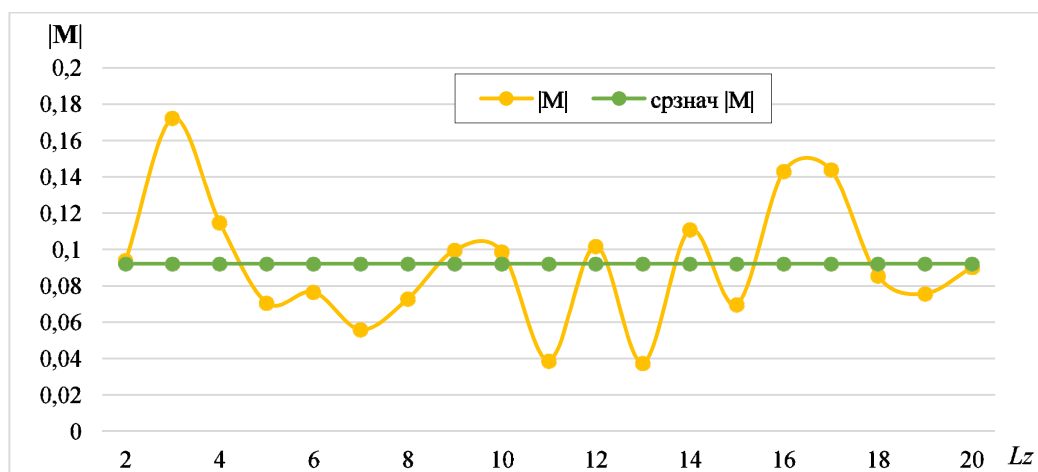
Рис. 1. Цветовая индикация распределения магнитных моментов атомов Fe в пленках толщиной (а) 2 атомных слоя $\approx 0,58$ нм, (б) 20 атомных слоев $\approx 5,78$ нм

В ходе вычислительного эксперимента вычислялся модуль намагниченности ($|\mathbf{M}|$), который для удобства сопоставления систем разного размера был нормирован по отношению к общему количеству атомов.

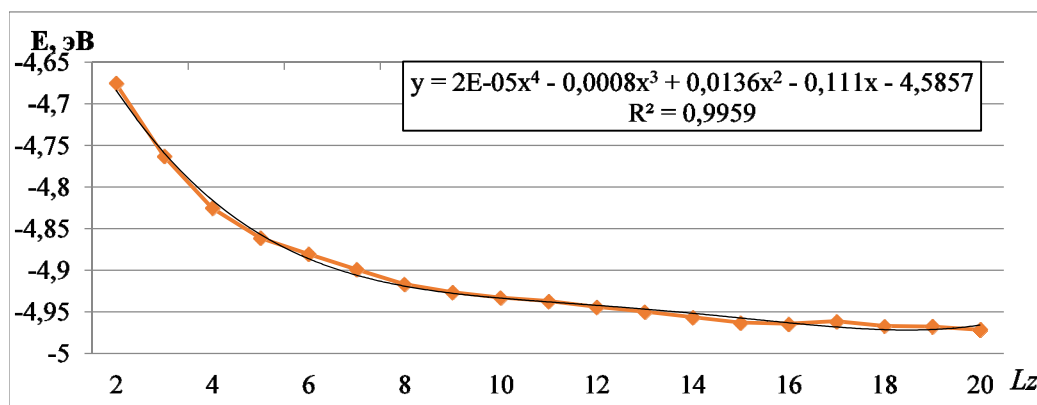
Анализ зависимости модуля намагниченности от толщины пленки свидетельствует о скачкообразном характере графика. Значения модуля намагничен-

ности варьируются от 0,03 до 0,17, что говорит о некоторой чувствительности магнитных свойств от количества атомных слоев. Среднее значение намагниченности составляет 0,09. Скачкообразное поведение может быть связано с топологическими эффектами в тонких пленках, флуктуациями локальных магнитных моментов и влиянием поверхностных состояний, доминирующих при малой толщине.

Исследование магнитной энергии, которое также было нормировано по отношению к общему числу атомов пленки, показало её постепенное снижение с увеличением толщины (рис. 3). Магнитная энергия изменяется в диапазоне от $-4,67$ до $-4,97$ эВ.



а



б

Рис. 2. Графики изменения (а) модуля намагниченности тонкой пленки Fe в зависимости от толщины образца (б) магнитной энергии, приходящейся на один атом, в тонкой пленке Fe в зависимости от изменения толщины образца

Подобное поведение магнитной энергии может быть связано с тем, что с увеличением толщины нанопленки доля ее поверхностных атомов уменьшается и снижается влияние различных топологических эффектов. По своим

физическим свойствам с ростом количества кристаллических слоев моделируемая система приближается к объемному материалу.

Заключение

В исследовании разработана комплексная математическая модель для описания магнитоупругих взаимодействий в магнитоупорядоченных системах. Модель объединяет молекулярную и спиновую динамику, используя стохастические уравнения Ланжевена и уравнение Ландау – Лифшица – Гилберта. Для моделирования взаимодействий атомов применен многочастичный потенциал MEAM, что обеспечивает высокую точность и воспроизводимость результатов. Реализация модели в программном комплексе LAMMPS с модулем SPIN позволяет масштабировать расчеты для различных граничных условий.

Результаты моделирования показали, что толщина пленок α -Fe существенно влияет на их магнитные характеристики. Скачкообразные изменения атомной намагниченности при увеличении толщины от 2 до 20 атомных слоев указывают на доминирование топологических эффектов в ультратонких пленках. Рост числа слоев уменьшает долю поверхностных атомов, что снижает поверхностную магнитную анизотропию и стабилизирует ферромагнитный порядок.

Предложенная методология открывает новые возможности для исследования многослойных структур, учета температурных флуктуаций и механических напряжений. Данные могут быть использованы для оптимизации параметров спинтронных устройств, повышая стабильность магнитных состояний и быстродействие. Развитие модели позволит глубже понять магнитные явления в наноструктурированных материалах, способствуя инновациям в спинтронике и магнитоэлектронике.

Список литературы

1. *Tudu, B.* Recent developments in perpendicular magnetic anisotropy thin films for data storage applications / B. Tudu, A. Tiwari // *Vacuum*. – 2017. – Vol. 146. – Pp. 329-341.
2. *Mishchenko, E.G.* Shot noise in a different ferromagnetic-paramagnetic-ferromagnetic spin valve / E.G. Mishchenko // *Phys. Rev. B*. – 2003. – Vol. 68. – P. 100409 (R). DOI:10.1103/PhysRevB.68.100409.
3. *Xiong, D.* Antiferromagnetic spintronics: an overview and outlook / D. Xiong, Y. Jiang, K. Shi, A. Du, Y. Yao, Z. Guo et al. // *Fundamental Research*. – 2022. – Vol. 2. – Pp. 522-534. DOI: 10.1016/j.fmre.2022.03.016.
4. *Cladera, A.* Iron-based shape memory alloys for civil engineering structures: An overview / A. Cladera, B. Weber, C. Leinenbach, C. Czaderski, M. Shahverdi, M. Motavalli // *Construction and building materials*. – 2014. – Vol. 63. – Pp. 281-293.
5. *Chen, S.* Enhanced performance in the direct electrocatalytic synthesis of ammonia from N₂ and H₂O by an in-situ electrochemical activation of CNT-supported iron oxide nanoparticles / S. Chen et al. // *Journal of Energy Chemistry*. – 2020. – Vol. 49. – Pp. 22-32.

6. *Bohra, M.* Ferromagnetic–Antiferromagnetic Coupling in Gas-Phase Synthesized M (Fe, Co, and Ni)–Cr Nanoparticles for Next-Generation Magnetic Applications / M. Bohra et al. // *Advanced Science*. – 2024. – Vol. 11, issue 43. – Pp. 2403708.
7. *Scheunert, G.* A review of high magnetic moment thin films for microscale and nanotechnology applications / G. Scheunert et al. // *Applied Physics Reviews*. – 2016. – Vol. 3, issue 1.
8. *Cubukcu, M.* Ultra-fast perpendicular spin–orbit torque MRAM / M. Cubukcu, O. Boulle, N. Mikuszeit, C. Hamelin, T. Brächer, N. Lamard et al. // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 2018. – Vol. 54, issue 4. – Pp. 1-4.
9. *Tomasello, R.* A strategy for the design of skyrmion racetrack memories / R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, G. Finocchio // *Scientific reports*. – 2014. – Vol. 4, issue 1. – Pp. 1-7. DOI: 10.1038/srep06784.
10. *Федотов, А. Ю.* Моделирование процессов формирования и исследование свойств нанопленок Co-Fe-Nb / А. Ю. Федотов, О. Ю. Северюхина, А. Ю. Саломатина., А. С. Сидоренко // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2024. – Т. 26, № 2. – С. 179–193.
11. Исследование магнитных свойств нанокompозита Co-Fe / А. Ю. Саломатина, А. Ю. Федотов, О. Ю. Северюхина, Ф. А. Виноградов // *Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов*. – 2024. – № 16. – С. 267-276. DOI: 10.26456/pcasenn/2024.16.267.
12. *Askerzade, I.* Modern aspects of Josephson dynamics and superconductivity electronics / I. Askerzade, A. Bozbey, M. Cantürk // Berlin : Springer. – 2017. – Vol. 2017.
13. *Plimpton, S.* Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics / S. Plimpton // *Journal of Computational Physics*. – 1995. – Vol. 117, issue 1. – Pp. 1-19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039.
14. *Paquet, E.* Molecular Dynamics, Monte Carlo Simulations, and Langevin Dynamics: A Computational Review / E. Paquet, H. L. Viktor // *BioMed Research International*. – 2015. – Vol. 2015. – Pp. 183918.1-18. DOI:10.1155/2015/183918.
15. *Antropov, V. P.* Ab Initio Spin Dynamics in Magnets / V. P. Antropov, M. I. Katsnelson, M. Van Schilfgaarde, B. N. Harmon // *Physical Review Letters*. – 1995. – Vol. 75. – Pp. 729–732. DOI:10.1103/PhysRevLett.75.729.
16. *Baskes, M.I.* Modified embedded-atom potentials for cubic materials and impurities / M. I. Baskes // *Phys. Rev. B*. – 1992. – Vol. 46, issue 5. – Pp. 2727-2742. DOI: 10.1103/PhysRevB.46.2727.

СЕКЦИЯ 2. ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 531.554

Разработка алгоритма восстановления начальных условий стрельбы по участку траектории

В. Ю. Алексеев, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе представлены результаты решения обратной задачи определения начальных условий стрельбы по данным траекторных измерений. Сформулирована математическая постановка прямой и обратной задач внешней баллистики. Проведено исследование сходимости численных методов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Реализован алгоритм классификации снарядов путем вычисления баллистического коэффициента по координатам траектории полета. В результате исследований разработана программа для решения обратной задачи определения начальных условий стрельбы и классификации снаряда по данным траекторных измерений.

Ключевые слова: внешняя баллистика, математическая модель, обратная задача, баллистический коэффициент, классификация снарядов, восстановление траектории.

Введение

В задачах внешней баллистики важную роль играет точное определение начальных условий движения летательного объекта, таких как координаты, скорость и угол вылета. Эти параметры в значительной степени определяют траекторию полета и позволяют прогнозировать дальнейшее движение объекта. Однако в ряде практических ситуаций начальные условия неизвестны, а в распоряжении имеются лишь фрагментарные траекторные данные, полученные с помощью измерительных средств. В таких случаях возникает необходимость решения обратной задачи – восстановления начальных условий на основе известных точек траектории [1, 2].

Решение данной задачи имеет важное прикладное значение. Оно используется при анализе результатов стрельб, идентификации параметров пусков, обратной реконструкции траектории при баллистических исследованиях, а также при калибровке математических моделей полета. Задача осложняется

тем, что измеренные траектории содержат ошибки, а сам процесс обратного восстановления представляет собой плохо обусловленную и зачастую многозначную задачу [3, 4].

В данной статье рассматривается методика численного решения обратной задачи восстановления начальных условий стрельбы по заданному набору точек траектории. Описываются математическая постановка, алгоритмы численного интегрирования и оптимизации, а также дается анализ точности и устойчивости полученных результатов.

Математическая модель внешней баллистики снаряда

Расчет траектории движения снаряда включает решение системы дифференциальных уравнений движения с учетом вращения снаряда. При этом считается, что снаряд является абсолютно стабилизированным, колебания оси снаряда относительно центра масс отсутствуют. В математической модели также учитывается неоднородность параметров атмосферы по высоте и распределение скорости ветра по степенному закону. Девивация вращающегося снаряда задается с помощью полуэмпирической функции.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 1). Координаты центра масс снаряда определяются из решения уравнений [5]:

$$\frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta, \quad \frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \psi, \quad (1)$$

где x_c – дальность в плоскости стрельбы; y_c – высота полета снаряда; z_c – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; V_k – скорость центра масс снаряда.

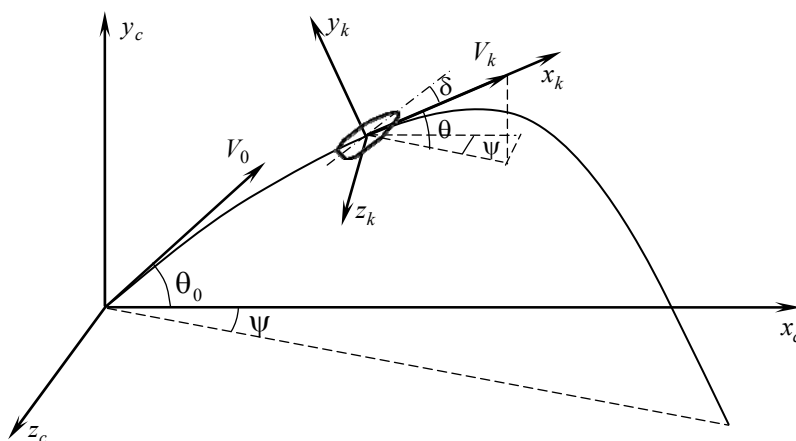


Рис. 1. Ориентация стартовой ($Ox_c y_c z_c$) и траекторной ($Ox_k y_k z_k$) систем координат

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_k y_k z_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1):

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_{x_k} q S_M}{m}, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k} q S_M}{m V_k}, \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{f_{z_k} - C_{z_k} q S_M}{m V_k \cos \theta}, \quad (4)$$

где g – ускорение силы тяжести; $C_{x_k}, C_{y_k}, C_{z_k}$ – коэффициенты составляющих аэродинамической силы по осям траекторной системы координат; f_{z_k} – коэффициент деривации; q – скоростной напор воздуха; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделева сечения снаряда; d – калибр снаряда; m – масса снаряда.

Метод численного интегрирования уравнений баллистики

Для решения дифференциальных уравнений применяется метод Рунге – Кутта 4-го порядка точности [6].

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad t > 0. \quad u(0) = u_0.$$

Явный метод Рунге – Кутта состоит в следующем. Вводится сеточная функция $y^n = y(t_n) \approx u(t_n)$. Последовательно вычисляются функции:

$$K_n^{(1)} = f(t_n, y^n), \quad K_n^{(2)} = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y^n + \frac{\tau K_n^{(1)}}{2}\right),$$

$$K_n^{(3)} = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y^n + \frac{\tau K_n^{(2)}}{2}\right), \quad K_n^{(4)} = f(t_n + \tau, y^n + \tau K_n^{(3)})$$

и находится новое значение $y^{n+1} = y(t_{n+1})$ по формуле

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \frac{1}{6} (K_n^{(1)} + 2K_n^{(2)} + 2K_n^{(3)} + K_n^{(4)}). \quad (5)$$

Алгоритм решения обратной задачи

При решении обратной задачи будем полагать, что метеорологические условия стрельбы известны. Заданы распределения параметров атмосферы (температура, давление, направление и скорость ветра) по высоте в виде зависимостей для нормальной артиллерийской атмосферы или реальных метеоданных.

Зафиксированный участок траектории снаряда измеряется с помощью радиолокатора. Локатор фиксирует координаты снаряда $P_i = (t_i, x_i, y_i, z_i)$ с шагом $\Delta t = 1$ секунда (рис. 2).

Задача решается в несколько шагов:

1. Построение аппроксимирующих полиномов данных измерений координат снаряда и определение траекторных параметров.

2. Расчет баллистического коэффициента и определение типа снаряда.
3. Обратный расчет траектории от начала зафиксированного участка траектории до точки выстрела.

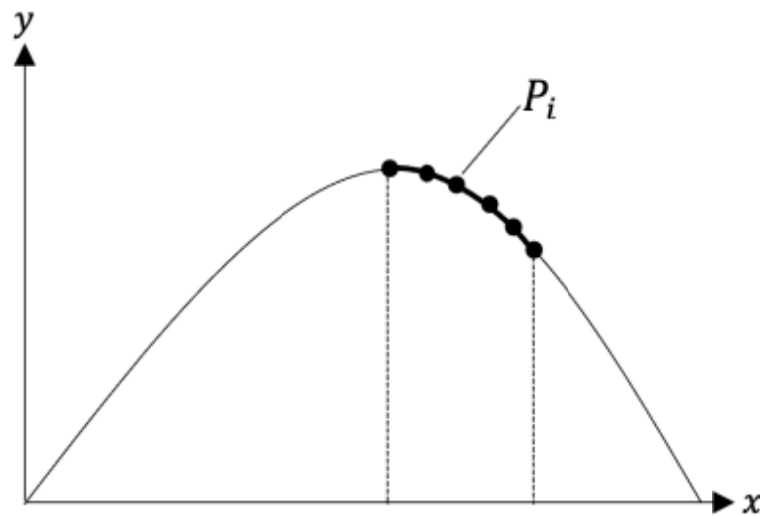


Рис. 2. Зафиксированный участок траектории

Построение аппроксимирующих полиномов и определение траекторных параметров

Данные измерений получены с некоторой погрешностью, зависящей от характеристик локатора. Для получения гладких кривых применяется процедура аппроксимации данных полиномом 3-й степени.

В общем случае аппроксимационные зависимости для измеренных координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x_c^a(t) &= a_{x0} + a_{x1}t + a_{x2}t^2 + a_{x3}t^3, \\
 y_c^a(t) &= a_{y0} + a_{y1}t + a_{y2}t^2 + a_{y3}t^3, \\
 z_c^a(t) &= a_{z0} + a_{z1}t + a_{z2}t^2 + a_{z3}t^3,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где $a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}, i = \overline{0,4}$ – коэффициенты аппроксимации, определяемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Для пути, пройденного снарядом, также строится аппроксимирующий полином:

$$S_c^a(t) = a_{s0} + a_{s1}t + a_{s2}t^2 + a_{s3}t^3,
 \tag{7}$$

где $a_{Si}, i = \overline{0,4}$ – коэффициенты аппроксимации, определяемые с помощью метода наименьших квадратов.

На рис. 3 в качестве примера представлены координаты z точек, сгенерированных на зафиксированном участке траектории с учетом средней ошибки измерения, равной 10 м (точки на графике). Сплошная линия соответствует координатам, полученным после аппроксимации данных полиномом 3-й степени.

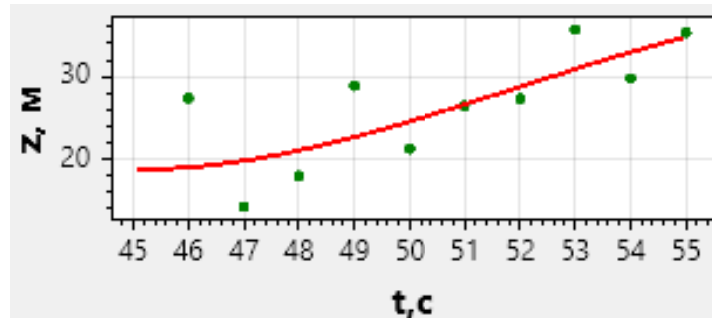


Рис. 3. Аппроксимация данных измерений полиномом 3 степени при $\sigma = 5$ м

Основные траекторные параметры (скорость, угол наклона траектории и угол пути) определяются на основе аппроксимационных зависимостей измеренных координат и пути снаряда с помощью дифференцирования полиномов:

$$V_k = \frac{dS_c^a}{dt}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{dy_c^a}{dx_c^a}\right), \quad \psi = -\arctg\left(\frac{dz_c^a}{dx_c^a}\right). \quad (8)$$

Расчет баллистического коэффициента и определение типа снаряда

Критерием подобия во внешней баллистике является баллистический коэффициент, который определяется по формуле

$$C = \frac{i_x d^2}{m} 1000, \quad (9)$$

где i_x – коэффициент формы снаряда для заданного закона сопротивления.

Значение баллистического коэффициента снаряда можно определить из уравнения изменения скорости (2) [7]:

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_{x_k} q S_M}{m} = -g \sin \theta - \frac{[i_x C_x^{эп}(M) + \Delta C_x(\varepsilon_w)] q \pi d^2}{4m}.$$

Откуда

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - C \cdot \left[C_x^{эп}(M) + \frac{\Delta C_x(\varepsilon_w)}{i_x} \right] q \frac{\pi}{4}. \quad (10)$$

Из уравнения (10) выразим баллистический коэффициент:

$$C = \frac{\frac{dV_k}{dt} + g \sin \theta}{\left[C_x^{эп}(M) + \frac{\Delta C_x(\varepsilon_w)}{i_x} \right] q \frac{\pi}{4}}. \quad (11)$$

Тип снаряда определяется путем сравнения рассчитанного значения баллистического коэффициента с табличным значением из базы данных параметров рассматриваемых артиллерийских снарядов по наилучшему совпадению.

Численные результаты

В результате решения задачи классификации снаряда были построены матрицы ошибок с отклонениями координат $\sigma = 0, 2, 5, 10$ м (таблица).

Матрица ошибок классификации снарядов ($\sigma = 5$ м)

	ОФ-49	ОФ-56	ОФ-482М	ОФ-29	ОФ-43	ОФ-15	ОФ-34	ОФ-26	53-Ф-864	М-107	М-106	М-933
ОФ-49	895	105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ОФ-56	0	149	0	0	0	0	0	0	0	0	0	851
ОФ-482М	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ОФ-29	0	0	0	719	0	0	0	0	4	277	0	0
ОФ-43	0	0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0
ОФ-15	0	0	0	0	0	906	0	94	0	0	0	0
ОФ-34	2	0	0	0	0	156	842	0	0	0	0	0
ОФ-26	0	0	0	0	0	0	0	1000	0	0	0	0
53-Ф-864	0	0	135	348	0	0	0	0	349	161	7	0
М-107	0	0	0	393	0	0	0	0	76	531	0	0
М-106	0	0	39	0	0	0	0	0	0	0	961	0
М-933	140	385	0	0	0	0	0	0	0	0	0	475

На рис. 4 представлен график зависимости точности классификации типа снаряда от погрешности измерения координат σ .

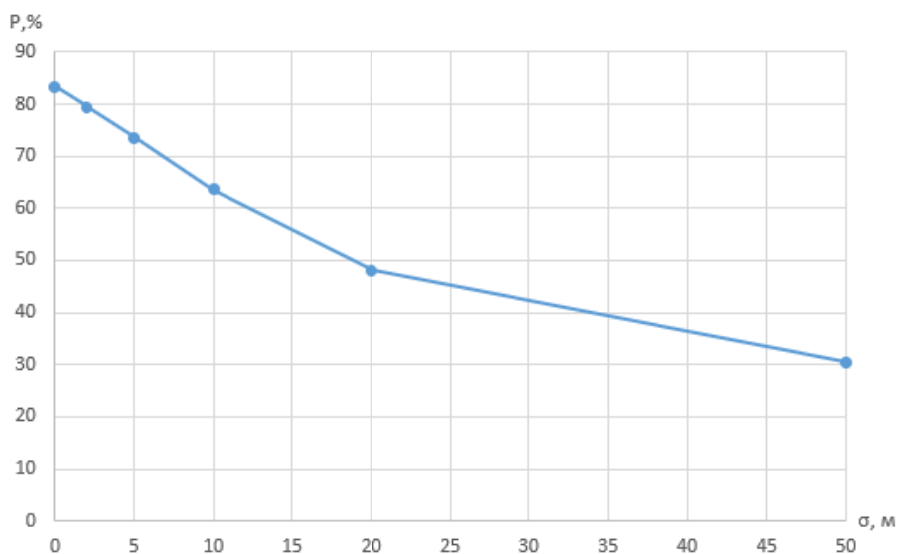


Рис. 4. График точности классификации снаряда в зависимости от σ

На рис. 5–6 представлены результаты восстановления траектории по зафиксированному участку. Рассмотрим случай, когда координаты снаряда фиксируются с погрешностью $\sigma = 5$ м.

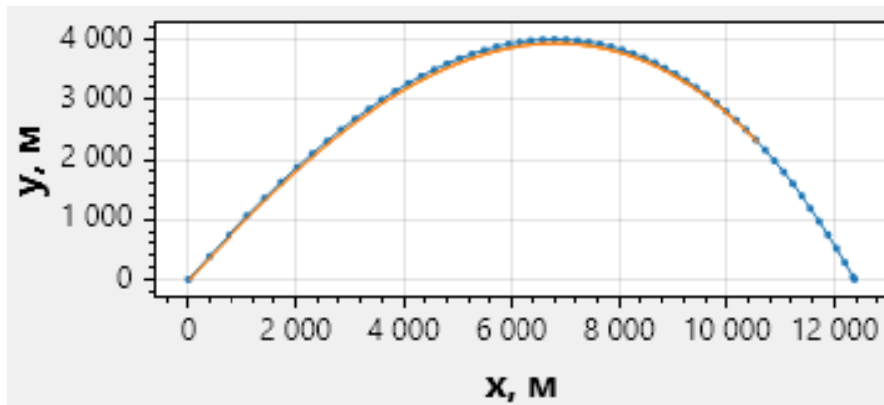


Рис. 5. Восстановленная траектория в плоскости Oxy ($\sigma = 5$ м)

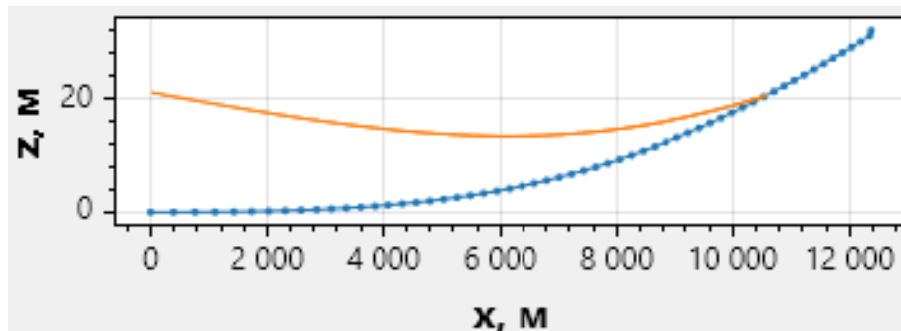


Рис. 6. Восстановленная траектория в плоскости Oxz ($\sigma = 5$ м)

Для получения наиболее вероятного расположения точки выстрела делается серия расчетов со случайным распределением координат точек положения снаряда на зафиксированном участке траектории с учетом погрешности измерений. Координаты точки выстрела соответствуют математическому ожиданию по серии из $N = 50$ запусков. Среднее отклонение от исходной точки выстрела составило 69,2 м.

На рис. 7 изображено среднее отклонение ε от исходной точки выстрела в зависимости от погрешности измерений σ .

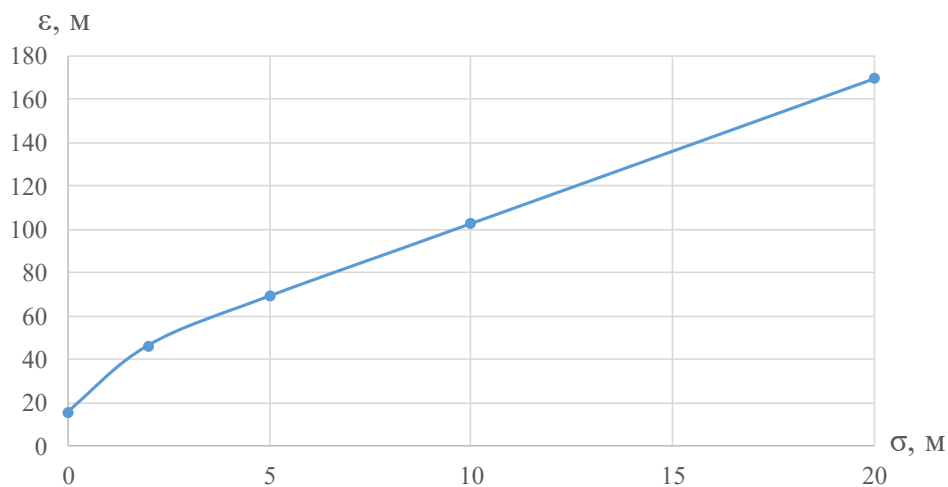


Рис. 7. Зависимость среднего отклонения точки выстрела ε от погрешности измерений координат снаряда σ

Заключение

В данной работе рассмотрена и реализована методика численного решения обратной задачи внешней баллистики по данным траекторных измерений. Реализован алгоритм восстановления начальных условий стрельбы, основанный на аппроксимации экспериментальных данных, расчете баллистического коэффициента, обратном интегрировании траектории и статистическом моделировании для повышения устойчивости результата.

Проведена верификация численных методов, в том числе анализ сходимости метода Рунге – Кутты, и подтверждена его применимость к решению задачи.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что при отсутствии погрешностей измерения отклонение восстановленной точки выстрела не превышает 16 метров, а при наличии погрешностей до 5 метров среднее отклонение составляет около 69 метров. Это подчеркивает важность учета ошибок измерения и применения методов сглаживания данных.

Список литературы

1. *Шати́ро, И.* Расчёт траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений / пер. с англ. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1961. – 319 с.
2. *Бляхман, А. Б.* О возможности применения обзорной радиолокационной станции для решения задач определения точек прицеливания (падения) / А. Б. Бляхман, С. Н. Митюгин, А. Г. Прохоров // Вестник концерна ВКО «Алмаз – Антей». – 2016. – № 2 (17). – С. 13–19.
3. *Козлитин, И. А.* Восстановление входных параметров расчета внешней баллистики тела по результатам траекторных измерений // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 9. – С. 121–134.
4. *Леонович, А. С.* Способ решения задачи определения точек старта (падения) снарядов при радиолокационной артиллерийской разведке с использованием оптимизационного метода / А. С. Леонович, С. Н. Ярмолик, М. В. Сви́нарский // Информационные радиосистемы и радиотехнологии. – Минск, Республика Беларусь, 2022. – С. 150–154.
5. *Лысенко, Л. Н.* Внешняя баллистика : учебное пособие. – 2-е изд. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2020. – 328 с.
6. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. – Т. 1. – Москва : Наука, 1975.
7. *Королев, С. А.* Разработка алгоритма восстановления начальных условий стрельбы по участку траектории / С. А. Королев, Г. В. Ренкез // II Липановские научные чтения : материалы Всероссийской школы-семинара молодых ученых и студентов. – Ижевск, 2023. – С. 61–70.

Решение задачи внешней баллистики с произвольными углами нутации вращающегося снаряда

Ф. С. Бондарев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе представлены результаты реализации компьютерной модели внешней баллистики Эйлера – Пуассона, которая позволяет проводить расчет движения снарядов, стабилизированных вращением, при различных углах нутации. Математическая модель Эйлера – Пуассона представляет собой систему дифференциальных уравнений со специфической левой частью, которая решается методом Рунге – Кутты. Разработано программное обеспечение для моделирования и 3D-визуализации движения снаряда на внешнебаллистической траектории. Проведено сравнение полученных результатов по модели Эйлера – Пуассона с результатами математической модели внешней баллистики для малых углов нутации, принятой в качестве базовой. Показано, что траектории стабилизированных снарядов, полученные по базовой модели и модели Эйлера – Пуассона, практически совпадают.

Ключевые слова: начальные условия стрельбы, внешняя баллистика, произвольные углы нутации, 3D-визуализация, математическое моделирование.

Введение

Во время стрельбы точность и кучность попаданий зависит от множества факторов. Помимо возмущающих условий среды, таких как ветер, огромную роль оказывают колебания ствола. Стремительное возрастание давления и скорости движения снаряда при выстреле приводит к возникновению колебаний ствола. Исследование влияния начальных условий вылета снаряда из дульного среза на точность стрельбы является актуальной научной и практической задачей, т. к. колебания вызывают возмущения при вылете снаряда из ствола, тем самым оказывая огромную роль на формирование начальных условий для задачи внешней баллистики, определяющей дальнейшее движение снаряда. Изучению данной проблемы посвящены работы российских и зарубежных авторов.

Целью работы является анализ и реализация математических моделей для исследования возмущенного движения снаряда на внешнебаллистической траектории. В задаче рассматривается 30-мм автоматическая пушка с осколочно-фугасным снарядом. Рассмотрены различные математические модели внешней баллистики и проведено сравнение полученных с помощью них результатов моделирования.

1. Описание систем координат во внешней баллистике

Во внешней баллистике различают несколько систем координат: стартовую, нормальную подвижную, траекторную и связанную. Каждая из них имеет свое назначение и используется для решения разных задач. Стартовая система координат $O_0X_cY_cZ_c$ представляет собой неподвижную систему, фиксированную относительно точки вылета снаряда. В этой системе горизонтальная ось O_0X_c направлена вдоль линии горизонта, вертикальная O_0Y_c – вверх, а третья ось O_0Z_c формирует правую систему координат. Данная система координат применяется для задания начальных условий движения снаряда, таких как начальная скорость, угол вылета и положение в пространстве [1].

Траекторная система координат $OX_kY_kZ_k$ движется вместе с центром масс снаряда и центрирована на нем. Ось OX_k ориентирована по вектору земной скорости V_k , OY_k – вдоль нормали к траектории, а ось OZ_k – перпендикулярно первым двум. Взаимное расположение траекторной и стартовой систем представлено на рис. 1.

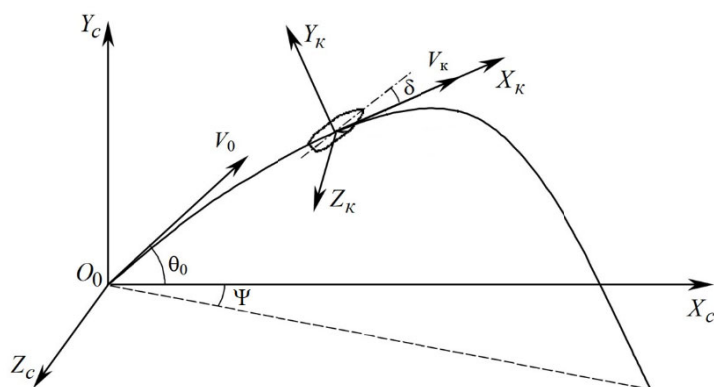


Рис. 1. Взаимная ориентация стартовой и траекторной систем координат

В нормальной системе координат $OX_gY_gZ_g$ направление осей совпадает с направлением в стартовой системе координат, однако начало расположено в центре масс снаряда.

Связанная система координат $OXYZ$ связана со снарядом и перемещается вместе с ним. Ее оси совпадают с главными осями инерции снаряда: продольная ось OX направлена вдоль оси симметрии снаряда, нормальная ось OY расположена в плоскости симметрии снаряда и направлена к его верхней части, поперечная ось OZ образует правую тройку векторов. В этой системе вычисляется угловая скорость снаряда и моменты аэродинамических сил. Она используется для анализа вращательного движения снаряда.

В скоростной (аэродинамической) $OX_aY_aZ_a$ системе координат скоростная ось OX_a совпадает с вектором воздушной скорости летательного аппарата, ось подъемной силы OY_a располагается в плоскости симметрии или в параллельной ей плоскости. Боковая ось OY_a дополняет оси до правой системы координат.

В этой системе вычисляются аэродинамические силы, действующие на снаряд, такие как силы лобового сопротивления и подъемная сила, которые зависят от угла атаки и скорости относительного потока воздуха.

Взаимная ориентация подвижных систем координат представлена на рис. 2.

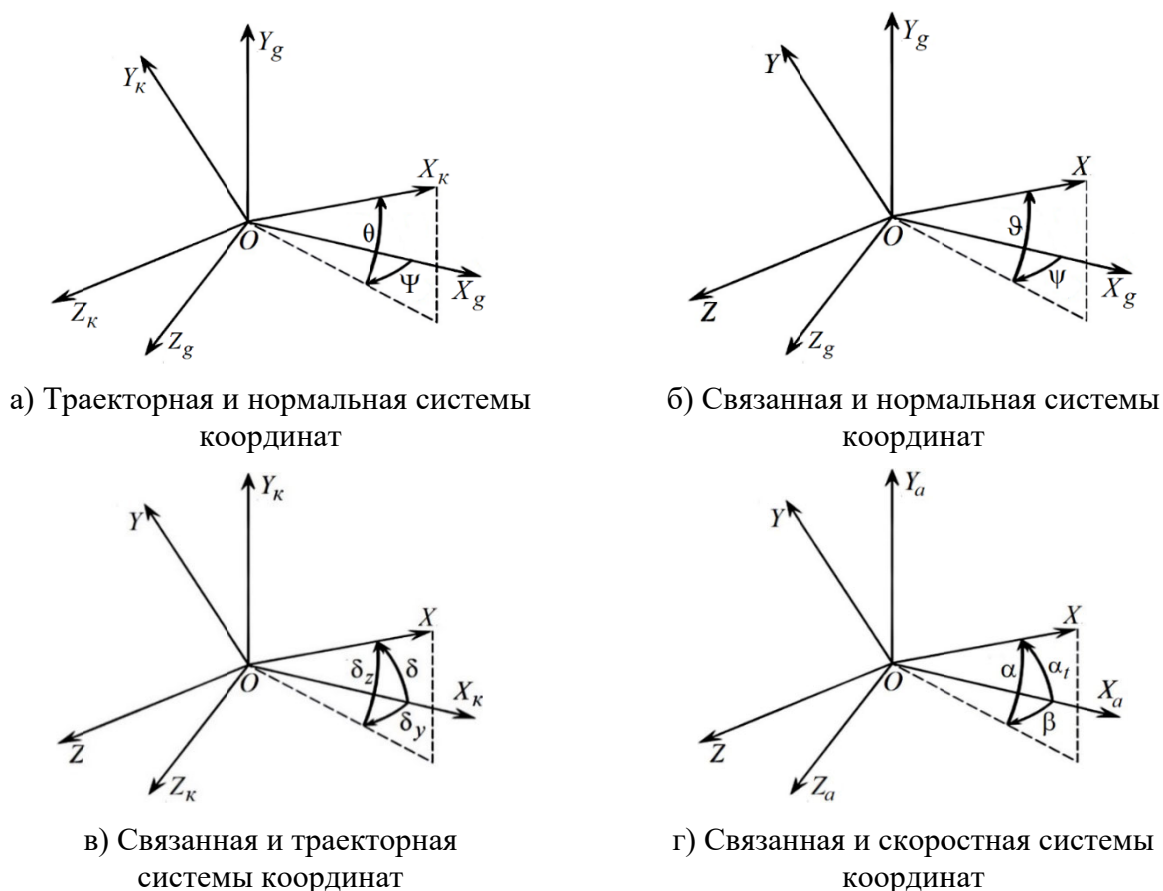


Рис. 2. Взаимная ориентация подвижных систем координат

Нормальная и связанная система координат связаны через углы тангажа ϑ , рыскания ψ и крена γ (на рисунке не показан). Угол тангажа ϑ – угол между продольной осью OX и плоскостью OX_gZ_g . Угол рыскания ψ – угол между осью OX_g и проекцией продольной оси снаряда OX на плоскость OX_gZ_g . Угол крена γ – угол между поперечной осью OZ и осью OZ_g , смещенной в положение, соответствующее нулевому углу рыскания.

Положение траекторной системы координат относительно нормальной определяется через угол возвышения θ и угол пути Ψ . Угол возвышения θ – угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью OX_gZ_g . Угол пути Ψ – угол между осью OX_g и проекцией вектора скорости на плоскость OX_gZ_g .

Связь между траекторной и связанной системами координат осуществляется с помощью составляющих угла нутации δ_y и δ_z . Вертикальная составляющая угла нутации δ_z – угол между проекцией вектора земной скорости на плоскость симметрии снаряда OXY и продольной осью OX . Горизонтальная

составляющая угла нутации δ_y – угол между вектором земной скорости и плоскостью OXY .

Связь между скоростной и связанной системами координат осуществляется с помощью угла атаки α и угла скольжения β . Угол атаки α – угол между проекцией вектора скорости на плоскость симметрии снаряда OXY и продольной осью OX . Угол скольжения β – угол между вектором скорости и плоскостью OXY . Суммарный угол, состоящий из углов атаки и скольжения называется пространственным углом атаки α_t .

2. Математическая модель внешней баллистики для малых углов нутации

Система (1) представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающую математическую модель внешней баллистики для малых углов нутации [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V_k \cos \theta \cos \Psi; \quad \frac{dy}{dt} = V_k \sin \theta; \quad \frac{dz}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \Psi; \\ \frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_{x_k} q S_M}{m}; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k} q S_M}{m V_k}; \\ \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{C_{z_k} q S_M}{m V_k \cos \theta}; \quad \frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{m_x q S_M l}{I_x}; \\ \frac{d\delta_y}{dt} = \frac{\omega_y - \dot{\Psi} \cos(\theta + \delta_z) - \dot{\theta} \delta_y \delta_z}{\cos \delta_z}; \quad \frac{d\delta_z}{dt} = \omega_z - \dot{\Psi} \sin \theta \delta_y - \dot{\theta} \cos \delta_y; \\ \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{m_1 q S_M l - I_x \omega_x \omega_z}{I_z}; \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{m_2 q S_M l + I_x \omega_x \omega_y}{I_z}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где x – дальность; y – высота полета; z – боковое отклонение; V_k – скорость центра масс снаряда; θ – угол возвышения; Ψ – угол пути; ω_x – аксиальная угловая скорость снаряда; δ_y , δ_z – горизонтальная и вертикальная составляющие угла нутации, ω_y , ω_z – горизонтальная и вертикальная составляющие экваториальной угловой скорости; C_{x_k} , C_{y_k} , C_{z_k} – коэффициенты проекций аэродинамической силы на оси траекторной системы координат $OX_k Y_k Z_k$; $q = \frac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор воздуха; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделева сечения; d – калибр снаряда; m – масса снаряда; M – число Маха; a – скорость звука; m_x – коэффициент аксиального аэродинамического момента; l – длина снаряда; m_1 , m_2 – коэффициенты соответствующих составляющих момента аэродинамической силы; I_x, I_y, I_z – моменты инерции относительно соответствующих осей.

Углы атаки α и скольжения β связаны со составляющими углы нутации δ_y , δ_z соотношениями [3]:

$$\alpha = \delta_z - \varepsilon_{w_2}; \quad \beta = \delta_y - \varepsilon_{w_1},$$

где $\varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_2}$ – составляющие угла сноса ветром. Следовательно, при отсутствии ветра данные углы совпадают.

Коэффициенты проекций аэродинамической силы сопротивления определяются по следующим зависимостям [4]:

$$\begin{aligned} C_{x_k} &= C_x^a(M, \alpha_t); \quad C_{y_k} = C_y^a(M, \alpha) + C_z^a(\bar{\omega}_x, \beta); \\ C_{z_k} &= -C_y^a(M, \beta) - C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha_t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ – пространственный угол атаки; $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{V}$ – безразмерная аксиальная угловая скорость; $C_x^a(M, \alpha_t)$, $C_y^a(M, \alpha_t)$, $C_z^a(\bar{\omega}_x, \alpha_t)$ – аппроксимационные зависимости коэффициентов проекций аэродинамической силы сопротивления на оси системы координат $OXYZ$.

Коэффициент аксиального аэродинамического момента и коэффициенты составляющих экваториального аэродинамического момента в системе уравнений определяются по следующим зависимостям [3]:

$$\begin{aligned} m_x &= m_x^a(M, \bar{\omega}_x); \quad m_1 = m_z^a(M, \beta) + m_y^a(M, \alpha, \bar{\omega}_x); \\ m_2 &= m_z^a(M, \alpha) + m_y^a(M, \beta, \bar{\omega}_x) \end{aligned} \quad (3)$$

где $m_x^a(M, \bar{\omega}_x)$, $m_y^a(M, \alpha, \bar{\omega}_x)$, $m_z^a(M, \beta)$ – аппроксимационные зависимости коэффициентов составляющих момента аэродинамической силы в системе координат, связанной с осью симметрии снаряда.

3. Модель внешней баллистики на основе уравнений Эйлера – Пуассона

Когда ориентация снаряда описывается через систему углов, в уравнениях появляются тригонометрические функции в знаменателях. Это может приводить к ситуациям, когда происходит деление на ноль, что создает проблемы в некоторых режимах движения. Таким образом, любая система углов содержит точку, в которой ее использование становится проблематичным [5].

Если же угловое положение задается через матрицу направляющих косинусов (см. табл. 1), требуется девять параметров, но между ними существуют шесть ограничений, связанных с ортогональностью. Шесть элементов этой матрицы вычисляются через уравнения Пуассона, а оставшиеся три определяются условиями ортогональности базисных векторов связанной системы координат [6].

Таблица 1. Косинусы углов между осями нормальной земной и связанной систем координат

Оси координат	OX	OY	OZ
OX_g	$\cos \vartheta \cos \psi$	$-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma$	$\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$
OY_g	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta \cos \gamma$	$-\cos \vartheta \sin \gamma$
OZ_g	$-\sin \psi \cos \vartheta$	$\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma$	$\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma$

Модель Эйлера – Пуассона выражена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a_{11}V_x + a_{12}V_y + a_{13}V_z; \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}V_x + a_{22}V_y + a_{23}V_z; \quad \frac{dz}{dt} = a_{31}V_x + a_{32}V_y + a_{33}V_z; \\ \frac{da_{11}}{dt} = \omega_z a_{12} - \omega_y a_{13}; \quad \frac{da_{12}}{dt} = \omega_x a_{13} - \omega_z a_{11}; \quad \frac{da_{13}}{dt} = \omega_y a_{11} - \omega_x a_{12}; \\ \frac{da_{21}}{dt} = \omega_z a_{22} - \omega_y a_{23}; \quad \frac{da_{22}}{dt} = \omega_x a_{23} - \omega_z a_{21}; \quad \frac{da_{23}}{dt} = \omega_y a_{21} - \omega_x a_{22}; \\ \frac{dV_x}{dt} = \omega_z V_y - \omega_y V_z + \frac{1}{m}(F_x - a_{21}G); \quad \frac{dV_y}{dt} = \omega_x V_z - \omega_z V_x + \frac{1}{m}(F_y - a_{22}G); \\ \frac{dV_z}{dt} = \omega_y V_x - \omega_x V_y + \frac{1}{m}(F_z - a_{23}G); \\ I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz} \frac{d\omega_z}{dt} = M_x - (I_{zz} - I_{yy})\omega_y \omega_z - I_{xy}\omega_x \omega_z + I_{xz}\omega_x \omega_y - I_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2); \\ I_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_z}{dt} = M_y - (I_{xx} - I_{zz})\omega_z \omega_x - I_{xy}\omega_y \omega_z - I_{yz}\omega_x \omega_y - I_{yz}(\omega_x^2 - \omega_z^2); \\ -I_{xz} \frac{d\omega_x}{dt} - I_{yz} \frac{d\omega_y}{dt} + I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} = M_z - (I_{yy} - I_{xx})\omega_x \omega_y - I_{yz}\omega_x \omega_z + I_{xz}\omega_y \omega_z - I_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2); \end{array} \right.$$

где $\alpha_{ij}, i, l = \overline{1,3}$ – направляющие косинусы осями стартовой и связанной системы координат; V_x, V_y, V_z – проекции скорости начала связанной системы координат на оси этой системы координат; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции угловой скорости снаряда на оси связанной системы координат, F_x, F_y, F_z – проекции главного вектора сил аэродинамического сопротивления на оси связанной системы координат; $G = mg$ – сила тяжести; I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – главные моменты инерции; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции, M_x, M_y, M_z – проекции главного момента сил аэродинамического сопротивления на оси связанной системы координат.

Проекции главного вектора сил аэродинамического сопротивления на оси связанной системы координат:

$$F_x = C_x^a q S_M; \quad F_y = C_y^a q S_M; \quad F_z = C_z^a q S_M, \quad (4)$$

где $C_x^a, C_y^a, C_z^a, m_x^a, m_y^a, m_z^a$ – аппроксимационные зависимости коэффициентов сопротивления аэродинамических сил и моментов в связанной системе координат соответственно.

Компоненты a_{31}, a_{32}, a_{33} вычисляются как результат векторного произведения между векторами $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ и $\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$:

$$a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}; \quad a_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}; \quad a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (5)$$

Проекции главного момента сил аэродинамического сопротивления на оси связанной системы координат выражаются через следующие зависимости:

$$M_x = m_x^a q S_M l; \quad M_y = m_y^a q S_M l; \quad M_z = m_z^a q S_M l. \quad (6)$$

Углы атаки и скольжения рассчитываются через проекции скорости на оси связанной системы координат [7]:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_y}{V_x}\right); \quad \beta = \arcsin\left(\frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}\right) \quad (7)$$

Точное значение пространственного угла атаки α_t задается выражением [8]:

$$\sin \alpha_t = \sqrt{(\sin \alpha \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta}.$$

Аналогично вычисляются углы возвышения и пути. Правые части первых трех уравнений системы (4) равны проекциям вектора скорости на оси нормальной системы координат. Обозначим эти проекции как $V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}$. Тогда получим следующие выражения:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{V_{y_g}}{\sqrt{V_{x_g}^2 + V_{y_g}^2 + V_{z_g}^2}}\right); \quad \Psi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{V_{z_g}}{V_{x_g}}\right). \quad (8)$$

4. Верификация компьютерной модели внешней баллистики

Задача внешней баллистики решается с применением двух моделей: модели при малых углах нутации и модели на основе уравнений Эйлера – Пуассона. В качестве базовой модели рассматривается первая модель. При расчетах использовались параметры, представленные в табл. 2. Моделирование полета снаряда производилось на расстояние 1000 метров. Шаг интегрирования равен $\tau = 10^{-6}$. Для результатов расчетов была проведена 3D-визуализация траектории движения снаряда.

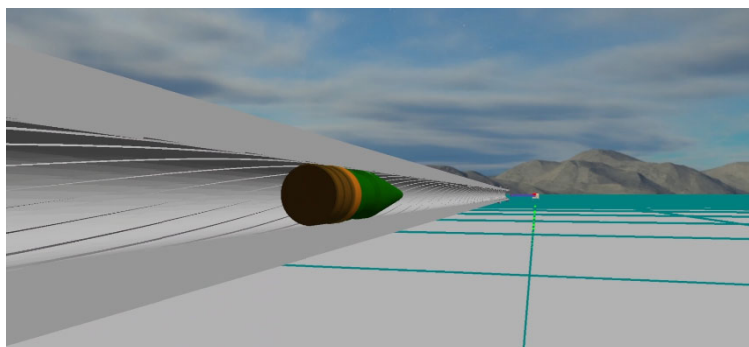


Рис. 3. 3D-визуализация движения снаряда

Таблица 2. Основные характеристики осколочно-фугасного снаряда

Параметр	Значение	Размерность
Масса	0,389	кг
Длина	0,165	м
Диаметр	0,03	м
Дульная скорость,	960	м/с
Момент инерции по оси OX	$4,065 \cdot 10^{-5}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$
Момент инерции по оси OY	$5,476 \cdot 10^{-4}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$
Момент инерции по оси OZ	$5,476 \cdot 10^{-4}$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$

Расчеты производились при следующих начальных условиях:

$$t_0 = 0 \text{ с}; \quad x_0 = 0 \text{ м}; \quad y_0 = 3 \text{ м}; \quad z_0 = 0 \text{ м};$$

$$V_0 = 960 \text{ м/с}; \quad \theta_0 = \vartheta_0 = 0,3^\circ; \quad \Psi_0 = \psi_0 = 0^\circ;$$

$$\omega_{x_0} = 8448 \text{ рад/с}; \quad \omega_{y_0} = 0 \text{ рад/с}; \quad \omega_{z_0} = 0 \text{ рад/с};$$

$$\delta_{y_0} = \beta_0 = 0^\circ; \quad \delta_{z_0} = \alpha_0 = 0^\circ; \quad \gamma_0 = 0^\circ;$$

$$a_{11_0} = \cos \vartheta_0 \cos \psi_0; \quad a_{12_0} = -\cos \psi_0 \sin \vartheta_0 \cos \gamma_0 + \sin \psi_0 \sin \gamma_0;$$

$$a_{13_0} = \cos \psi_0 \sin \vartheta_0 \sin \gamma_0 + \sin \psi_0;$$

$$a_{21_0} = \sin \vartheta_0; \quad a_{22_0} = \cos \vartheta_0 \cos \gamma_0; \quad a_{23_0} = -\cos \vartheta_0 \sin \gamma_0;$$

$$V_{x_0} = V_0 \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\beta_0)}{1 + \text{tg}^2(\alpha_0)}}; \quad V_{y_0} = \text{tg}(\alpha_0) V_{x_0}; \quad V_{z_0} = \sin(\beta_0) V_0$$

На рис. 4 представлен график траектории полета снаряда, рассчитанной по двум моделям.

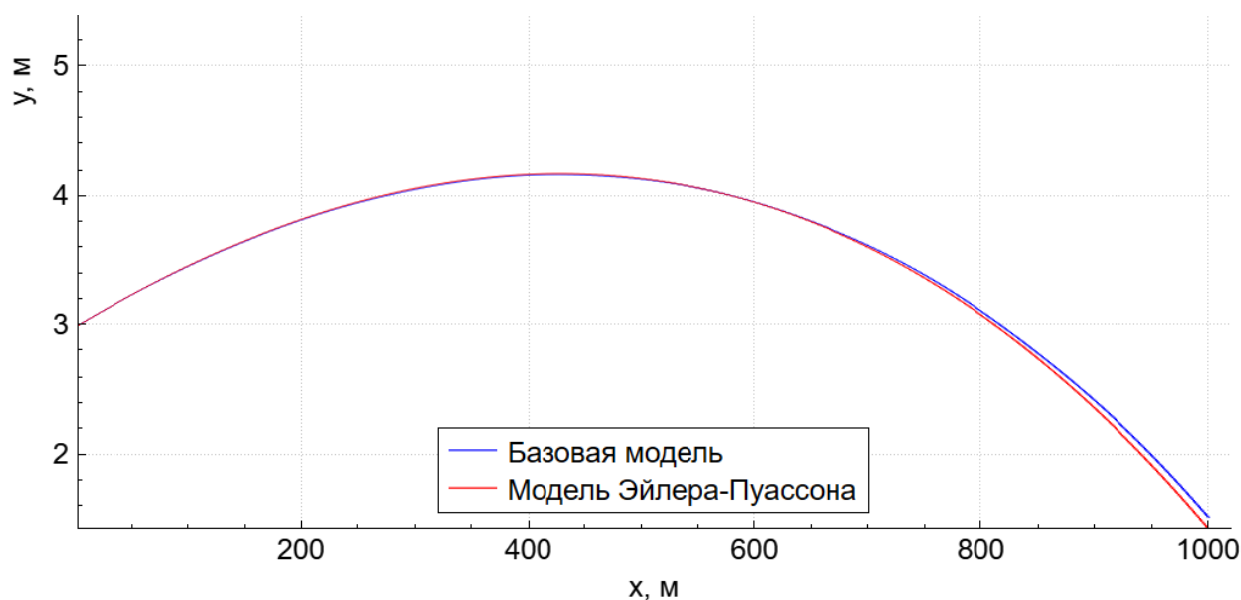


Рис. 4. График траектории полета снаряда

Время полета снаряда как для упрощенной модели, так и модели Эйлера – Пуассона составило $t = 1,258$ с. Расстояние конечной точки, полученной по модели Эйлера – Пуассона при $x = 1000$ м от конечной точки, полученной по базовой модели, составило $0,114$ м.

Заключение

В работе были рассмотрены математические модели внешней баллистики малых углов нутации и модель на основе уравнений Эйлера – Пуассона. Описано формирование начальных условий стрельбы для обеих моделей. Проведено сравнение полученных результатов моделирования. Приняв модель для малых углов нутации в качестве базовой, было проведено сравнение модели Эйлера – Пуассона. Моделирование выстрела производилось на расстояние 1000 метров. Время полета снаряда как для упрощенной модели, так и модели Эйлера – Пуассона составило $t = 1,258$ с. Расстояние конечной точки, полученной по модели Эйлера – Пуассона от конечной точки, полученной по базовой модели, составило $0,114$ м.

Список литературы

1. Дмитриевский, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко. – Москва : Машиностроение, 2005. – 608 с.
2. Королев, С. А. К вопросу о точности решения прямой задачи внешней баллистики / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2017. – № 47. – С. 63–74.
3. Королев, С. А. Исследование влияния возмущающих факторов на траекторию движения снарядов и ракет при стрельбе с подвижного носителя / С. А. Королев, И. Г. Русяк, В. Г. Суфиянов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – № 11-3. – С. 23–33.
4. Численное моделирование артиллерийского выстрела с применением визуальных технологий для проектирования и отработки артиллерийских систем: моно-

графия / А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев, В. Г. Суфиянов, С. А. Королев, М. Н. Белобородов. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2023. – 416 с.

5. *Знаменский, Е. А.* Обобщенная математическая модель пространственного движения артиллерийских боеприпасов / Е. А. Знаменский, Б. Э. Кэрт, Ю. А. Набоков // *Фундаментальные основы баллистического проектирования : сборник трудов V Всероссийской научно-технической конференции. 27 июня – 1 июля 2016 года.* Санкт-Петербург : Библиотека журнала «ВОЕНМЕХ. Вестник БГТУ». – 2017. – № 41. – С. 11–14.

6. *Кэрт, Б. Э.* Кинематика (с дополнительными главами) : учеб. пособие / Б. Э. Кэрт, Ж. Н. Андреева, О. Г. Агошков. – Санкт-Петербург : Балт. Гос. Техн. ун-т., 2014. – 222 с.

7. *Правдин, В. М.* Баллистика неуправляемых летательных аппаратов / В. М. Правдин, А. П. Шанин. – Снежинск : РФЯЦ – ВНИИТФ, 1999. – 496 с.

8. McCoy R.L. *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles.* Schiffer Publishing Ltd.: Atglen, PA, 1999.

9. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations.* Vol. 1. Berlin: Springer–Verlag, 1991. 528 p.

Оптимизация структуры и параметров нейронной сети для решения обратной задачи внешней баллистики

Т. Р. Валеев, Д. Г. Нефедов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе предложены алгоритмы и программное обеспечение для интеллектуальной системы управления артиллерийской стрельбой. Для решения обратной баллистической задачи (определения углов наведения по заданным координатам цели) разработана искусственная нейронная сеть. Модель обучена на данных, полученных при численном моделировании прямой задачи, и позволяет предсказывать управляющие параметры, определяющие траекторию снаряда в реальном времени без ресурсоемких итеративных расчетов.

Ключевые слова: нейронная сеть, внешняя баллистика, управление стрельбой, интеллектуальная система, оптимальные параметры, прямая и обратная задача.

Введение

Традиционное решение задач внешней баллистики основано на численном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение снаряда. Однако точность таких расчетов зависит от множества факторов: начальных условий, характеристик снаряда, параметров среды и других переменных, что усложняет построение точной модели [1].

Для определения углов наведения орудия, обеспечивающих попадание в цель, требуется решение обратной задачи. Классический метод (многократное интегрирование с корректировкой) может быть слишком медленным для оперативного применения.

В данной работе предлагается подход на основе искусственной нейронной сети, которая обучается на данных вычислительных экспериментов. Этот метод исключает необходимость точного физического моделирования, заменяя его аппроксимацией зависимостей в процессе обучения. Основное внимание уделено оптимизации параметров сети для повышения точности и скорости работы системы.

1. Математическая постановка задачи наведения и корректировки стрельбы

Для решения прямой задачи внешней баллистики строится система дифференциальных уравнений, описывающих изменение координат снаряда и траекторных параметров под действием внешних сил [2].

Представим результаты решения прямой задачи внешней баллистики в виде функции:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{P}_k, \tau_k) = \Phi_1(\mathbf{P}_0, V_0, \alpha_c, \theta_0, \mathbf{A}). \quad (1)$$

Здесь обозначено $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k, z_k)$ – координаты точки падения снаряда; τ_k – время полета снаряда; $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – координаты точки расположения орудия; V_0 – начальная скорость снаряда; $\alpha_{\text{ц}}$ – дирекционный угол цели; θ_0 – угол стрельбы. Вектор \mathbf{A} содержит параметры, характеризующие баллистические, геофизические и метеорологические условия стрельбы.

Решение обратной задачи внешней баллистики заключается в определении обратного преобразования:

$$\mathbf{z} = (\alpha_{\text{ц}}, \theta_0) = \Phi_2(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\text{ц}}, V_0, \mathbf{A}), \quad (2)$$

где $\mathbf{P}_{\text{ц}} = (x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}, z_{\text{ц}})$ – координаты цели.

Решение прямой задачи (1) реализовано с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Путем многократного решения прямой задачи при варьировании углов $\alpha_{\text{ц}}$ и θ_0 , температуры T_a и давления P_a воздуха, направления α_w и скорости w ветра и других параметров формируется база данных вычислительных экспериментов:

$$(\mathbf{x}^h; \mathbf{y}^h) = (x_0^h, y_0^h, z_0^h, V_0^h, \alpha_{\text{ц}}^h, \theta_0^h, T_a^h, P_a^h, \alpha_w^h, w^h, \dots; x_k^h, y_k^h, z_k^h, \tau_k^h), h = \overline{1, H}, \quad (3)$$

где H – количество экспериментов.

2. Оптимизации структуры и параметров нейронной сети для решения обратной задачи внешней баллистики

В данной работе для оптимизации структуры и параметров нейронной сети применяется метод полного перебора (Grid Search). Этот подход заключается в систематическом тестировании всех возможных комбинаций, заданных параметров с последующей оценкой их эффективности.

Принцип работы метода заключается в следующем: сначала определяется пространство параметров, где задаются возможные варианты архитектуры сети, функций активации и оптимизаторов, формируя для каждого параметра дискретный набор значений. Затем для каждой комбинации параметров создается и обучается нейронная сеть, после чего производится оценка ее качества на валидационной выборке с использованием метрики средней абсолютной ошибки (MAE). На заключительном этапе фиксируются время обучения, ошибка и конфигурация модели, после чего выбирается комбинация параметров, обеспечивающая наилучшую точность. В рамках исследования рассматриваются следующие параметры [3]:

1. Архитектура сети (общее число нейронов фиксировано – 64).

- один слой, [64];
- два слоя, [32, 32];
- три слоя, [16, 16, 32];
- четыре слоя, [16, 16, 16, 16].

2. Функции активации.

- LeakyReLU (устраняет проблему «умирающих нейронов»);
- Sigmoid (логистическая функция);

- ReLU (выпрямленный линейный блок);
 - Tanh (гиперболический тангенс).
3. Оптимизаторы.
- Adam (адаптивная оценка моментов);
 - SGD (стохастический градиентный спуск);
 - RMSprop (среднеквадратичное распространение);
 - Adagrad (адаптивный градиент);
 - Adadelatа (расширение AdaGrad).
4. Функция потерь.
- MAE (Mean Absolute Error) – средняя абсолютная ошибка;
 - MSE (Mean Squared Error) – среднеквадратичная ошибка;
 - Huber – Функция потерь Хубера (компромисс между MAE и MSE).

Для реализации интеллектуальной системы используется следующий алгоритм: сначала генерируются все возможные комбинации параметров, затем для каждой комбинации поочередно обучается модель на данных, полученных из модуля внешней баллистики. После этого фиксируются метрики (MAE, время обучения) в файл *xlsx*, а результаты визуализируются с помощью графиков.

На рис. 1 показана компоненты интеллектуальной системы[4].

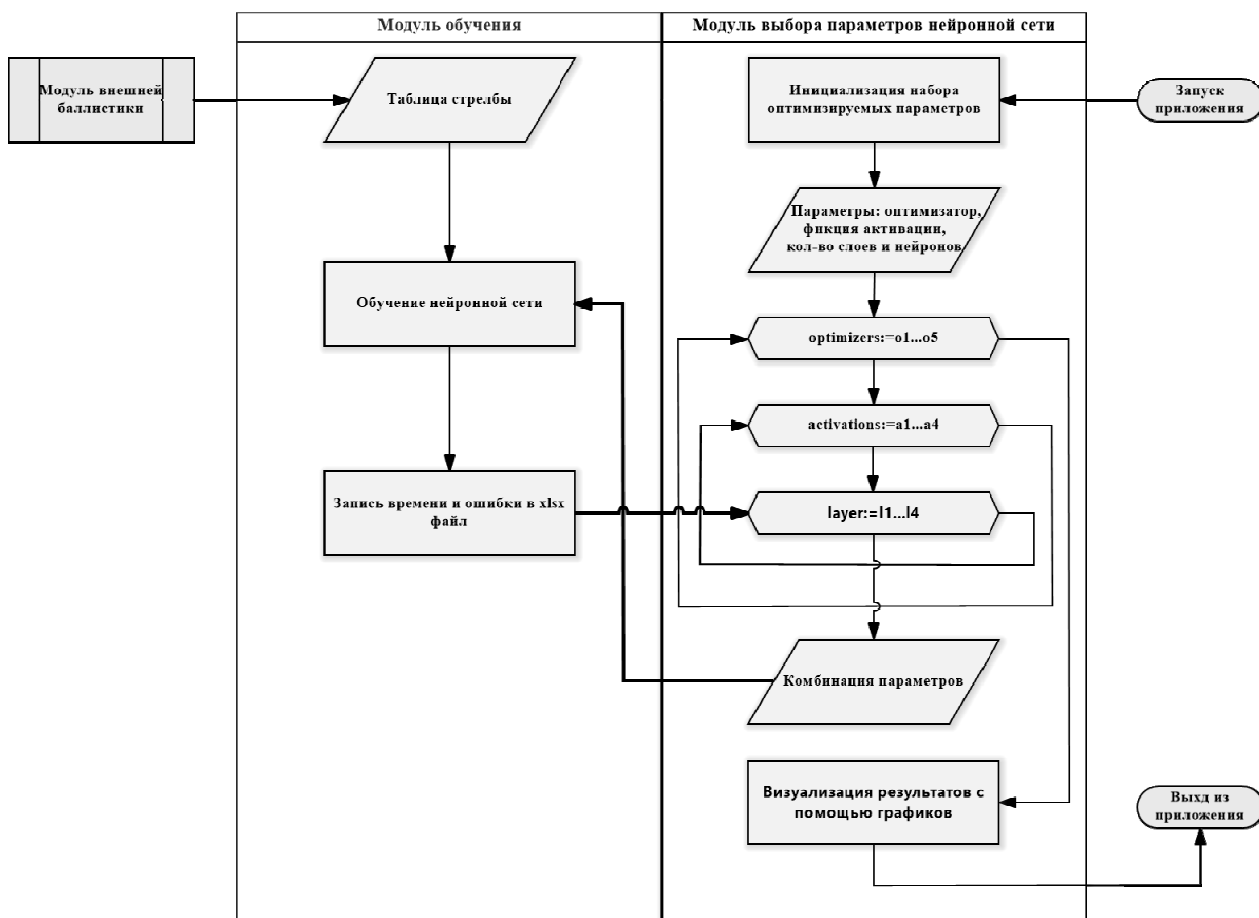


Рис. 1. Блок-схема алгоритма решения обратной задачи с использованием искусственной нейронной сети

Данный подход позволяет не только найти оптимальную конфигурацию, но и проанализировать влияние каждого параметра на качество модели. Гарантированно находит наилучшую комбинацию в заданном пространстве параметров. Не требует сложных алгоритмов оптимизации. При большом числе параметров время перебора растет экспоненциально.

Для решения обратной задачи (2) используется многослойная нейронная сеть. Для обучения данной сети используется выборка данных (3). Реализована нейронная сеть на языке Python с использованием библиотеки Keras [3].

3. Результаты оптимизации

Рассмотрим ошибку и время обучения нейронной сети, полученные в результате исследования при использовании разных комбинации параметров [5]. В таблице приведены лучшие результаты по каждому оптимизатору.

Общая таблица с лучшими результатами

Оптимизаторы	Функция активации	Архитектура	Ошибка	Время, с
Adam	tanh	16 16 16 16	0,006	190
SGD	LeakyReLU	32 32	0,014	174
RMSprop	relu	32 32	0,0086	150
Adadelata	relu	32 32	0,063	178
AdaGrad	LeakyReLU	16 16 16 16	0,028	176

По результатам из таблиц видно, что Adam показал наименьшую ошибку (MAE = 0,006) с архитектурой [16, 16, 16, 16] и tanh. Adadelata и AdaGrad демонстрирует худшие результаты (MAE = 0,063, MAE = 0,028) crelu, LeakyReLU и архитектурой [32 32] и [16, 16, 16, 16]. SGD (MAE >0,014) и RMSprop (MAE >0,0086) имеют ошибку ниже Adam, но выше, чем у Adadelata и AdaGrad.

Обучающая выборка содержит 5000 экспериментов. Количество эпох 1000.

При решении обратной задачи внешней баллистики ошибка аппроксимации нейронной сетью углов наведения на цель составила 0,6 %, что для интервала изменения угла $\theta_c \in [0; 45^\circ]$ составляет 0,27°.

На рис. 2 приведен график сравнения ошибок.

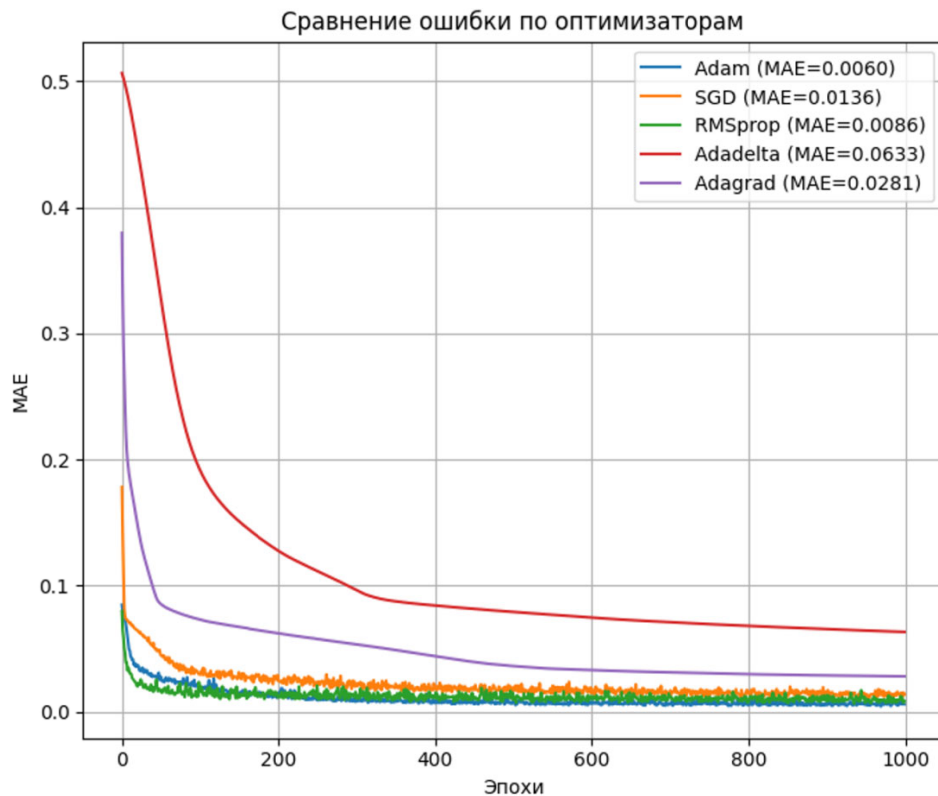


Рис. 2. Сравнение точности работы различных оптимизаторов

Из графика на рис. 2 видно, что Adam и RMSprop сходятся быстрее всего, достигая минимального MAE. Adadelta и Adagrad демонстрируют медленную сходимость и высокий MAE. SGD показывает средние результаты, но хуже Adam.

На рис. 3 представлен график сравнения времени.

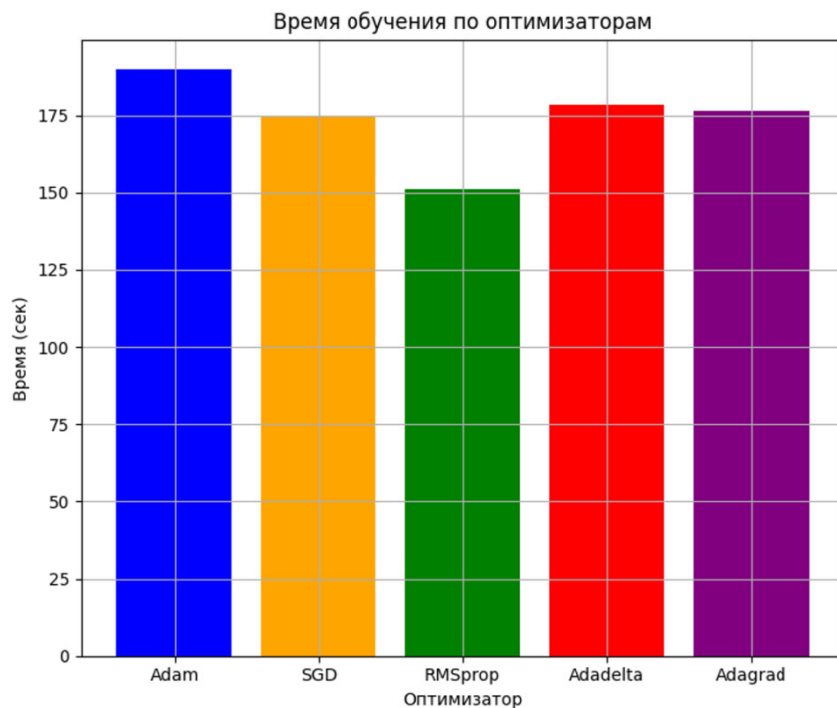


Рис. 3. Сравнение скорости работы различных оптимизаторов

Из графика на рис. 3 видно, что RMSprop и SGD – самые быстрые (~152–175 с). Adam, Adadelta и Adagrad требуют больше времени (~176–198 с).

Заключение

Таким образом, разрабатываемая система управления стрельбой позволяет автоматизировать процессы наведения, чем обеспечивает высокую оперативность решения задачи, не требует участие человека и исключает возможные ошибки, связанные с человеческим фактором. Применение оптимизации параметров нейронной сети позволяет более точно решать обратную задачу, что обеспечивает повышение точности поражения цели.

Список литературы

1. *Новиков, В. Г.* Математические модели систем наведения летательных аппаратов : учеб. пособие. – Коломна : Изд-во КИ(ф) МГОУ, 2011. – 112 с.
2. *Королев, С. А.* Интеллектуальная система автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки / С. А. Королев, Д. Г. Нефедов, И. Г. Русяк // Интеллектуальные системы в производстве. – 2024. – Т. 22, № 3. – С. 85–91. – DOI: 10.22213/2410-9304-2024-3-85-91.
3. *Нефедов, Д. Г.* Разработка интеллектуального алгоритма автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки / Д. Г. Нефедов, С. А. Королев // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах (ICOS'2023). Липановские чтения : сборник трудов одиннадцатой Всероссийской конференции и школы-семинара молодых ученых и студентов. – Ижевск, 2024. – С. 153–161.
4. *Rashka S.* Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, Scikit-Learn, and TensorFlow 2. Packt Publishing, 2019. 770 p.
5. Программа расчета углов наведения и корректировки стрельбы. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2023615914, 20.03.2023. Авторы: Королев С. А., Нефедов Д. Г., Русяк И. Г.

Разработка алгоритмов наведения и корректировки стрельбы активно-реактивным снарядом

М. Ю. Ефимов, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В данной работе рассматривается повышение точности и дальности стрельбы активно-реактивным снарядом. Для решения этой задачи разработана математическая модель движения снаряда, учитывающая управляющие воздействия. На основе системы дифференциальных уравнений баллистического движения реализованы численные методы различного порядка точности. Особое внимание уделено алгоритмам решения обратной задачи наведения и корректировки траектории. Создан расчетный модуль, позволяющий проводить исследования при различных начальных условиях. Тестовые расчеты подтвердили работоспособность предложенных алгоритмов и показали возможность увеличения дальности стрельбы. Разработанные методы и программное обеспечение могут быть использованы при проектировании систем управления артиллерийскими боеприпасами.

Ключевые слова: внешняя баллистика, активно-реактивный снаряд, численные методы, метод Рунге – Кутты, обратная задача, наведение, корректировка траектории.

Введение

В настоящее время во внешней баллистике [1, 2] ведутся активные научные исследования и разработки в области совершенствования баллистических и управляемых систем вооружения. Одним из перспективных направлений является применение активно-реактивных снарядов [3–6], обладающих возможностью изменения траектории полета за счет работы собственного реактивного двигателя. Это позволяет существенно увеличить дальность стрельбы и повысить точность поражения цели, особенно в условиях изменяющейся обстановки или при наличии внешних возмущений.

Особый интерес представляет задача построения математических моделей и алгоритмов, обеспечивающих эффективное наведение и корректировку [7, 8] траектории полета таких снарядов. Основными трудностями при решении данной задачи являются необходимость учета нелинейных факторов, таких как аэродинамическое сопротивление, изменение массы в процессе горения топлива, а также вращательное движение снаряда.

Целью настоящего исследования является разработка алгоритмов численного моделирования движения активно-реактивного снаряда с учетом действия реактивной тяги, а также реализация методов решения обратной задачи – определения угла выстрела, обеспечивающего попадание в заданную точку [9].

Математическая модель

Расчет траектории движения снаряда включает решение системы дифференциальных уравнений движения с учетом вращения снаряда и использования реактивного двигателя в конструкции. При этом считается, что снаряд является абсолютно стабилизированным, колебания оси снаряда относительно центра масс отсутствуют.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы. Координаты центра масс снаряда определяются из решения уравнений [5]:

$$\frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta, \quad \frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \psi, \quad (1)$$

где x_c – дальность в плоскости стрельбы; y_c – высота полета снаряда; z_c – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; V_k – скорость центра масс снаряда.

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_k y_k z_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости:

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta + \frac{P - C_{x_k} q S_M}{m}, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k} q S_M}{m V_k}, \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{f_{z_k} - C_{z_k} q S_M}{m V_k \cos \theta}, \quad (4)$$

где g – ускорение силы тяжести; P – тяга реактивного двигателя; $C_{x_k}, C_{y_k}, C_{z_k}$ – коэффициенты составляющих аэродинамической силы по осям траекторной системы координат; f_{z_k} – коэффициент деривации; q – скоростной напор воздуха; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделева сечения снаряда; d – калибр снаряда; m – масса снаряда.

При наличии реактивного двигателя изменение массы снаряда определяется из уравнения:

$$\frac{dm}{dt} = -\mu_p. \quad (6)$$

Секундный расход массы при истечении газов:

$$\mu_p = \frac{m_p \bar{\mu}_p(\bar{t}_p)}{t_{к.р} - t_{н.р}},$$

где $\bar{\mu}_p(\bar{t}_p)$ – безразмерная функция переменного секундного расхода газов реактивного двигателя (определяется по диаграмме тяги); $\bar{t}_p = (t - t_{н.р}) / (t_{к.р} - t_{н.р})$ – относительное время работы реактивного двигателя; $t_{н.р}$, $t_{к.р}$ – время начала и конца работы двигателя.

Тяга реактивного двигателя:

$$P = \mu_p I_1,$$

где I_1 – единичный импульс тяги двигателя.

Численный метод

Для численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение активно-реактивного снаряда, в работе реализован метод Рунге – Кутты. Данный метод выбран за его устойчивость, относительную простоту реализации и высокую точность при расчетах динамических систем.

Была реализована возможность использовать различные порядки метода Рунге – Кутты – второго, третьего и четвертого. Основной расчет выполняется по классической схеме четвертого порядка, позволяющей эффективно интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Помимо прямой задачи моделирования траектории, в работе решается обратная задача – нахождение такого угла выстрела, при котором снаряд попадет в заданную точку по дальности.

Для ее решения используется метод хорд. Целевой функцией служит отклонение по дальности между конечной расчетной координатой x_p и требуемой координатой цели $x_{ц}$.

Минимум функции определяется численным методом с заданной точностью. На каждом шаге пересчитывается траектория с новым углом выстрела, пока не будет достигнуто попадание в цель с заданной погрешностью.

Алгоритм корректно работает как для случаев с реактивной тягой, так и для пассивного снаряда. Это позволяет сравнивать эффективность различных режимов полета и строить траектории наведения.

Характеристики и начальные данные снарядов

Основные параметры рассматриваемых осколочно-фугасного (ОФ-29) и активно-реактивного снарядов (АРС) представлены в табл. 1.

Таблица 1. Основные параметры снарядов ОФ-29 и АРС

№ п/п	Орудие	Индекс снаряда	Калибр d , мм	Коэф. формы $i_{x43}(i_{x58})$	Масса m , кг	Начальная скорость V_0 , м/с	Максимальная дальность X_{max} , км
1	Пушка 2А36	ОФ-29	152	1,02	46,0	945	26,9
2	Пушка 2А36	АРС	152	1,02	51,0	850	47,7

Для проверки работоспособности реализованной модели и оценки влияния различных параметров были проведены численные эксперименты с использованием разработанного расчетного модуля. Для АРС также задавались масса топлива $m_T=5$ кг и расход топлива $\dot{m}=1,66$ кг/с.

Результаты расчетов

На рис. 1 показана боковая проекция траектории движения активно-реактивного снаряда и снаряда ОФ-29 (плоскость $Ox_c y_c$).

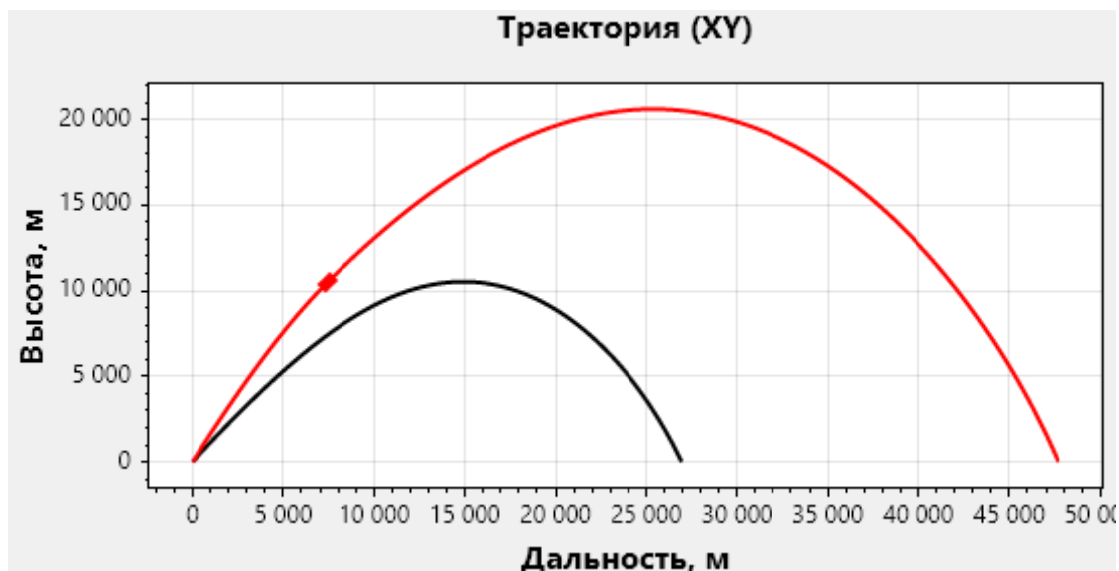


Рис. 1. Траектория полета в боковой проекции

На рис. 2 представлена горизонтальная проекция (плоскость $Ox_c z_c$), позволяющая оценить боковое отклонение.

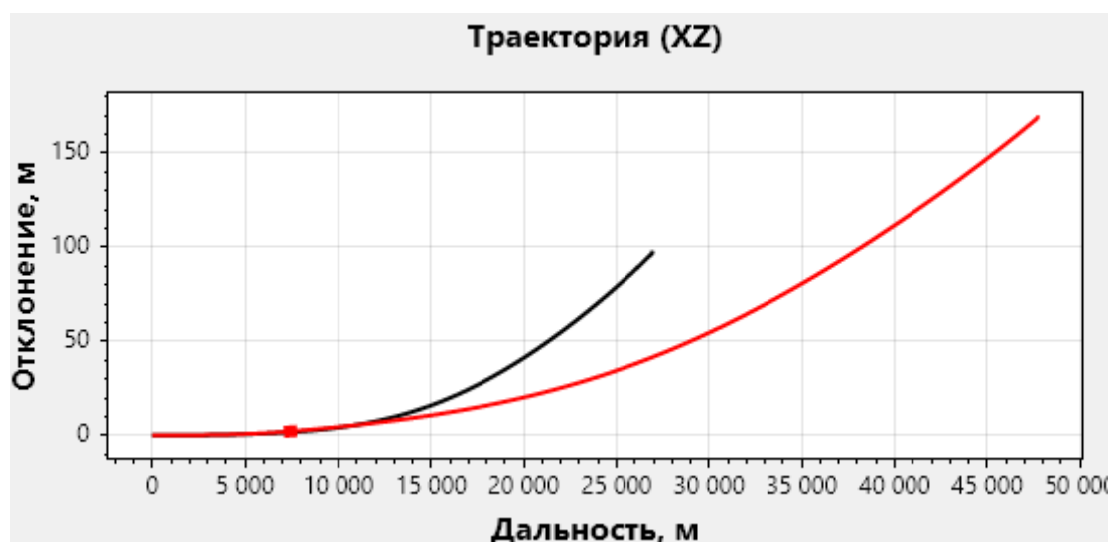


Рис. 2. Траектория полета в горизонтальной проекции

Получили максимальные дальности для обоих снарядов. Максимальная дальность АРС равна 47,7 км при угле выстрела в 59 градусов и времени старта

двигателя 20 с. Максимальная дальность ОФ-29 равна 26,9 км при угле 49 градусов.

На рис. 3 представлены траектории полета АРС со временем старта двигателя от 0 до 30 секунд с шагом 5 секунд и оптимально подобранными углами стрельбы.

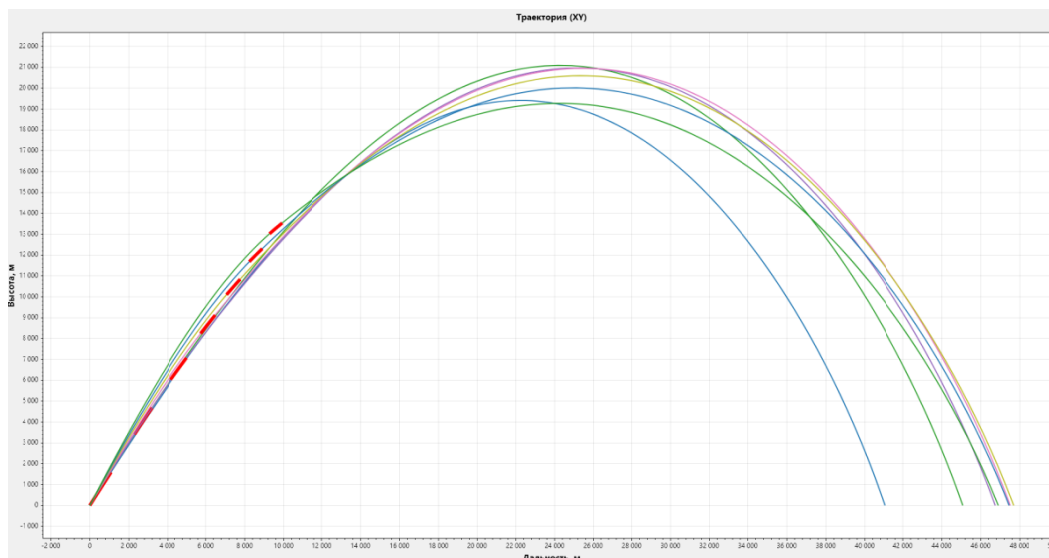


Рис. 3. Траектории при различном времени старта двигателя

Ниже представлена таблица с оптимальными углами стрельбы и дальностью для различного времени старта двигателя.

Таблица 2. Дальность полета АРС при различном времени старта двигателя

Время старта, с	Угол стрельбы, град	Дальность, км
0	56	41,04
5	57	45,09
10	57	46,75
15	58	47,52
19	59	47,70
20	59	47,70
21	59	47,68
25	60	47,46
30	61	46,92

Так же были разработаны таблицы стрельбы АРС для времени старта 0,10 и 20 секунд. В таблице выводится дальность и соответствующий угол выстрела в градусах. Ниже для примера представлен фрагмент таблицы стрельбы для времени старта двигателя 20 секунд.

Таблица 3. Таблица стрельбы для времени старта двигателя 20 секунд

№	Дальность, м	Угол, град
1	5000	1,97
2	5500	2,21
3	6000	2,47
4	6500	2,75
5	7000	3,03
6	7500	3,33
7	8000	3,65
8	8500	3,98
9	9000	4,33
10	9500	4,7
11	10000	5,08
12	10500	5,5
13	11000	5,93
14	11500	6,39
	...	

Вывод

В данной работе была разработана и реализована математическая модель движения активно-реактивного снаряда, учитывающая действие реактивной тяги, аэродинамического сопротивления, изменение массы и вращательное движение. На основе построенной модели были реализованы численные методы решения задачи внешней баллистики, включая прямую и обратную задачи.

Программный модуль, основанный на методах Рунге – Кутты различных порядков, показал высокую точность моделирования. Особое внимание было уделено решению обратной задачи – определению оптимального угла выстрела для поражения цели на заданной дальности. Разработанный численный алгоритм показал устойчивую сходимость и высокую точность при расчете дальности.

Проведенное сравнение траекторий штатного осколочно-фугасного снаряда и активно-реактивного снаряда продемонстрировало заметное увеличение дальности полета и максимальной высоты при наличии тяги. Это подтверждает целесообразность применения активно-реактивных снарядов в задачах дальноточной стрельбы.

Список литературы

1. Гуськов, А. В. Внешняя баллистика / А. В. Гуськов, К. Е. Милевский, А. В. Сотенко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 187 с.
2. Коновалов, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Коновалов, Ю. В. Николаев. – Москва : ЦНИИ ин формации, 1979. – 228 с.
3. Смирнов, В. Е. Основы проектирования активно-реактивных снарядов с прямоточным воздушно-реактивным двигателем на твёрдом топливе / В. Е. Смирнов, И. Е. Никитина, Л. А. Розанов. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2022. – 329 с.

4. *Королев, С. А.* Исследование пределов повышения дальности стрельбы активно-реактивным снарядом / С. А. Королев, Р. Р. Мансуров // Проектирование систем вооружения и измерительных комплексов : труды 19-й Всероссийской научно-технической конференции. – Нижний Тагил, 2023. – С. 159–170.

5. *Королев, С. А.* Разработка математического и программного обеспечения баллистического расчета и оптимизации параметров активно-реактивного снаряда / С. А. Королев, Р. Р. Мансуров // Интеллектуальные системы в производстве. – 2024. – Т. 22, № 4. – С. 98–107.

6. *Мансуров, Р. Р.* Комплексная оптимизация параметров активно-реактивного снаряда с целью повышения дальности стрельбы // Сборник материалов VIII Всероссийской научно-технической конференции. – Санкт-Петербург, 2022. – С. 10–12.

7. *Королев, С. А.* Интеллектуальная система автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки / С. А. Королев, Д. Г. Нефедов, И. Г. Русяк // Интеллектуальные системы в производстве. – 2024. – Т. 22, № 3. – С. 85–91.

8. *Королев С. А., Нефедов Д. Г., Русяк И. Г.* Программа расчета углов наведения и корректировки стрельбы на основе интеллектуального анализа данных о положении цели и отклонений снарядов от цели. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023615914, 20.03.2023.

9. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 57. – С. 76–83.

Комплексное математическое моделирование и оптимизация параметров активно-реактивного снаряда

Р. Р. Мансуров, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Статья посвящена разработке математических моделей и вычислительных алгоритмов для решения задачи повышения дальности и точности стрельбы активно-реактивным снарядом. Представлены математические модели и постановка задачи комплексной оптимизации внутри- и внешнебаллистических процессов активно-реактивного снаряда. Предложен способ повышения устойчивости полета активно-реактивного снаряда за счет специального оребрения внутренней поверхности сопла.

Ключевые слова: внутренняя баллистика, внешняя баллистика, активно-реактивный снаряд, повышение дальности, гироскопическая устойчивость, математическое моделирование, программный комплекс.

1. Математическая модель внутренней и внешней баллистики

Для решения задачи повышения дальности стрельбы классическим осколочно-фугасным снарядом (ОФС) и активно-реактивным снарядом (АРС) с твердотопливным реактивным двигателем (РДТТ) разработана комплексная математическая модель внутренней и внешней баллистики и методика оптимизации параметров с целью повышения дальности стрельбы. При этом, помимо увеличения дальности, необходимо обеспечить необходимую точность стрельбы, которая зависит от устойчивости снаряда на траектории. Контроль устойчивости движения ОФС и АРС на траектории выполняется с помощью критерия гироскопической устойчивости.

Система уравнений внутренней баллистики описывает процессы горения пороховых элементов, движения снаряда в стволе, изменения давления и температуры пороховых газов в переменном объеме заснарядного пространства [1]. Схема задачи внутренней баллистики в стволе орудия представлена на рис. 1.

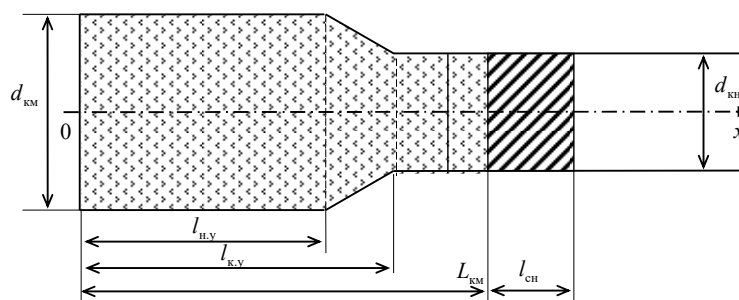


Рис. 1. Схема задачи внутренней баллистики в стволе орудия

На основе модели внутренней баллистики в стволе орудия определяется зависимость дульной скорости АРС от его массы.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 2). Координаты центра масс снаряда определяются из решения уравнений [2]:

$$\frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta, \quad \frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \psi, \quad (1)$$

где V_k – скорость центра масс снаряда; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления.

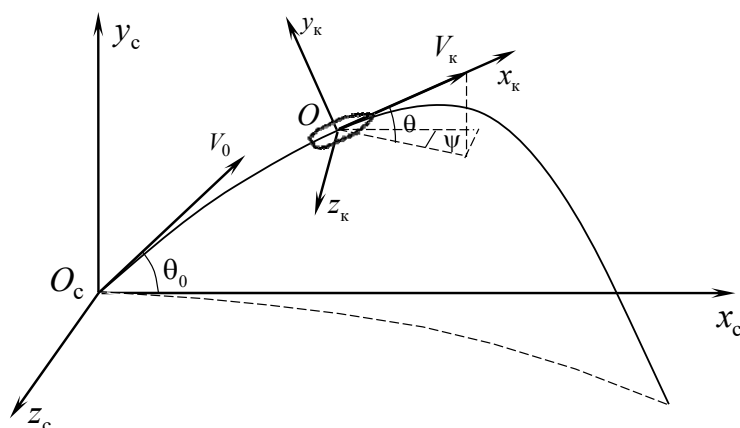


Рис. 2. Ориентация стартовой ($Ox_c y_c z_c$) и траекторной ($Ox_k y_k z_k$) систем координат

Характеристики движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_k y_k z_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости [3].

Для определения параметров в критическом и выходном сечении сопла решалась задача внутренней баллистики твердотопливного реактивного двигателя [4]. Схема расчета внутренней баллистики РДТТ представлена на рис. 3.

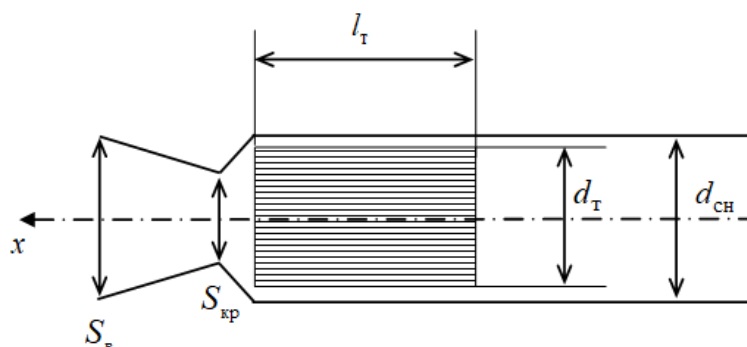


Рис. 3. Схема расчета внутренней баллистики реактивного двигателя

Сила тяги и момент вращения реактивного двигателя в случае наличия ребер на внутренней поверхности сопла определяются следующими соотношениями:

$$P = P_{\Sigma} [(1 - \nu) + \nu \cos \beta], \quad M_{px} = P_{\Sigma} \nu r_e \sin \beta, \quad (2)$$

где r_e – радиус приложения силы вращения, примем $r_e = d_B / 2$; β – угол наклона ребер относительно оси снаряда (рис. 4, б).

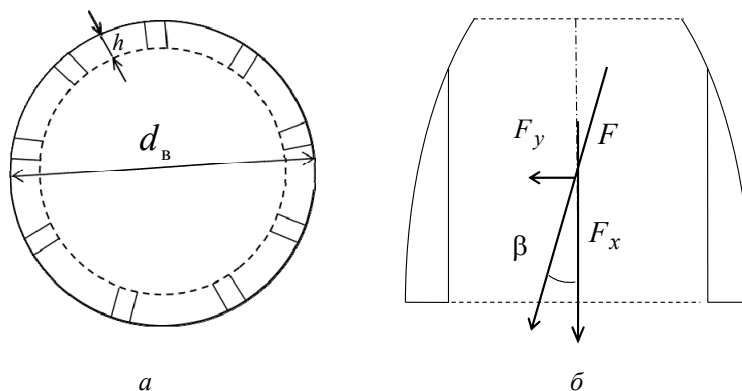


Рис. 4. Схема сопла с ребрами на внутренней поверхности:
а – торцевое сечение; б – боковое сечение

Тогда долю тяги, идущей на вращательный момент, будем определять по следующей приближенной формуле:

$$\nu = \frac{S_1}{S_B} = f(h) \approx \frac{4h}{d_B}, \quad (3)$$

где S_1 – площадь ребер в выходном сечении, $S_1 = S_B - \frac{\pi(d_B - 2h)^2}{4} \approx \pi d_B h$;

$S_B = \frac{\pi d_B^2}{4}$, d_B – диаметр выходного сечения сопла; h – высота ребер (рис. 4, а).

2. Комплексная задача оптимизации

Для контроля устойчивости снаряда на всей траектории воспользуемся коэффициентом гироскопической устойчивости [5]:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1^2}}, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{I_x}{2I_y} \omega_x$ – коэффициент гироскопического момента; $\beta_1 = \frac{m_z^\alpha q S_M l}{I_y}$ – коэффициент опрокидывающего аэродинамического момента; I_y – экваториальный моменты инерции; m_z^α – производная коэффициента аэродинамического момента.

На основе теоретических исследований считается, что снаряд устойчив при условии $\sigma > 0$. Однако на практике коэффициент гироскопической устойчивости выбирают из условия $0,6 < \sigma < 0,9$ [6].

Для выбора оптимальных баллистических параметров АРС решалась задача максимизации дальности стрельбы [7]:

$$X = F(m_T, V_0, \theta_0, t_c, v) \rightarrow \max, \quad (5)$$

где m_T – масса топлива РД; V_0 – начальная скорость; θ_0 – угол стрельбы; t_c – время старта РД.

Дополнительные соотношения:

$$V_0 = V_0(m_\Sigma); \quad I_T = I_T(m_T), \quad (6)$$

где $V_0(m_\Sigma)$ – начальная скорость, определяется из решения задачи внутренней баллистики в стволе орудия; $I_T(m_T)$ – суммарный импульс тяги, определяется из решения задачи внутренней баллистики РДТТ.

3. Численное моделирование течения газа в выходной части сопла с ребрами на внутренней поверхности

Для верификации аналитических зависимостей (2)–(3), учитывающих влияние ребер при расчете газодинамики сопла, была проведена серия численных экспериментов с моделированием течения газа в выходной части сопла с ребрами на внутренней поверхности. Моделирование проводилось в пакете прикладных программ Ansys Fluent.

На рис. 5 приведена расчетная сетка, состоящая из $1,7 \cdot 10^6$ элементов. Вблизи стенки сопла проводилось сгущение сетки с помощью метода inflation.

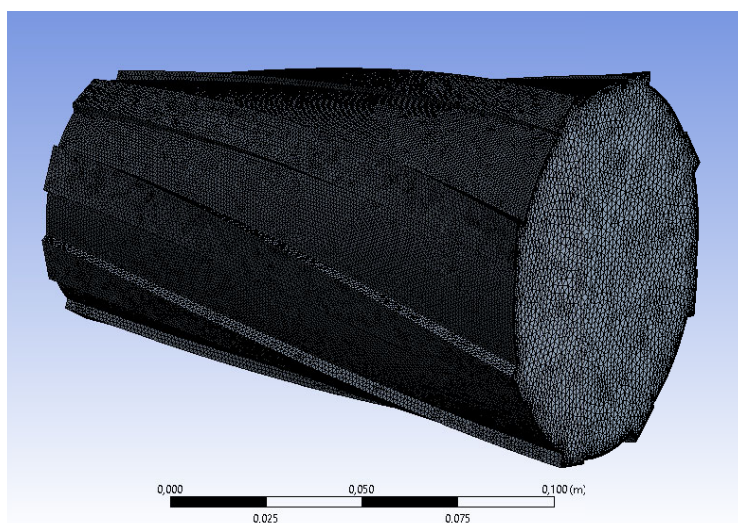


Рис. 5. Расчетная сетка области течения газа в выходной части сопла с ребрами

Расчеты проводились для различных геометрических параметров ребер: высота, угол наклона и количество ребер. Для верификации аналитических зависимостей были определены различия между численным решением и аналитическими зависимостями.

В табл. 1 приведены значения доли тяги и момента вращения при различной высоте ребер.

Отклонение результатов расчета по аналитической зависимости от численного решения для момента вращения составило не более 3,2 %, для доли тяги – 1,0 %.

Таблица 1. Значение доли тяги и момента вращения при различной высоте ребер

Высота ребра, мм	Численное решение (отклонение по аналитической зависимости)	
	Момент вращения, Н·м (%)	Доля тяги на вращение, (%)
1	2,02 (0,1 %)	3,3 (1,0 %)
2	4,64 (0,9 %)	7,4 (0,3 %)
4	9,89 (3,2 %)	15,7 (0,1 %)

Для оценки влияния количества ребер n на вращательный момент, на основе обработки результатов численного решения, был определен поправочный коэффициент

$$k(n) = 1 + 0,09 \cdot \ln(n). \quad (7)$$

Тогда доля тяги на вращение будет определяться по формуле:

$$v = k(n) \cdot f(h) = (1 + 0,09 \ln(n)) \cdot \frac{4h}{d_B}. \quad (8)$$

4. Результаты решения задачи моделирования внутренней и внешней баллистики

На основе решения задачи внутренней баллистики была определена зависимость начальной скорости снаряда при вылете из ствола орудия от массы снаряда. При изменении суммарной массы снаряда с 46 до 55,6 кг начальная скорость уменьшилась с 945 до 851 м/с (рис. 6).

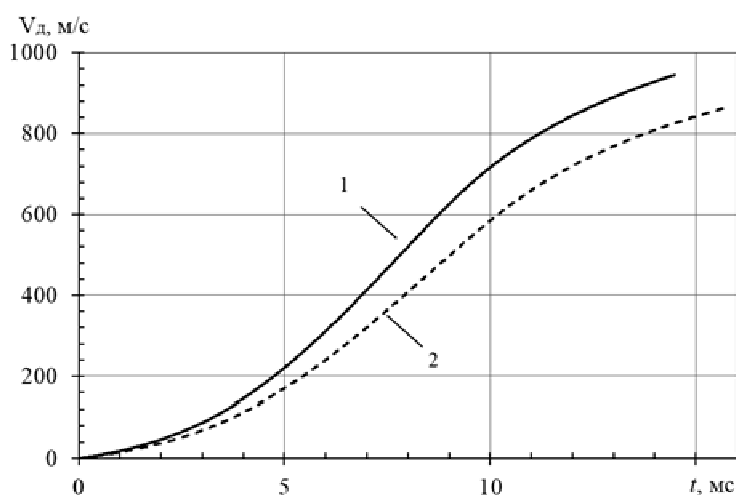


Рис. 6. Изменение скорости в стволе орудия:
1 – ОФС, 2 – АРС

На основе комплексной математической модели внутренней и внешней баллистики активно-реактивного снаряда с учетом предложенных аналитических зависимостей расчета параметров сопла с ребрами на внутренней поверхности проведен анализ устойчивости движения снаряда по критерию (4). На рис. 7 изображены зависимости коэффициента гироскопической устойчивости для различных типов снарядов.

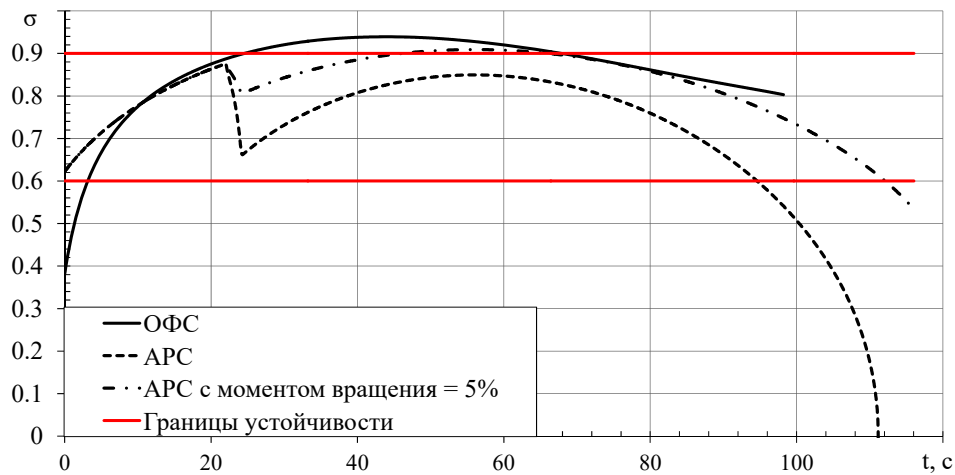


Рис. 7. Изменение критерия устойчивости для различных типов снаряда

Значения дальности стрельбы при оптимальных внешнебаллистических параметрах АРС представлены в табл. 2. На рис. 8 представлены расчетные траектории движения данного АРС.

Таблица 2. Характеристики моделируемого и штатного снаряда

Тип снаряда	Дальность полета, км
ОФС	28,5
АРС с моментом вращения	37,7
АРС	38,6

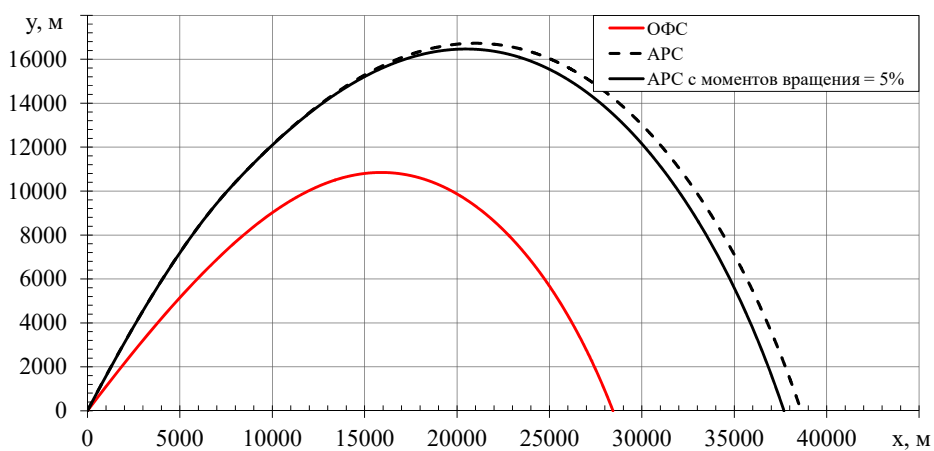


Рис. 8. Траектория полета снаряда

Заключение

Реализована математическая модель внутренней баллистики в стволе орудия и РДТТ. Определена зависимость начальной скорости снаряда в зависимости от массы при условии ограничения на максимальное давление внутри ствола орудия.

Реализована математическая модель внешней баллистики с учетом условия устойчивости. Исследована устойчивость штатного снаряда и активно-реактивного снаряда с ребрами на внутренней поверхности сопла.

Предложены аналитические зависимости для расчета силы тяги и момента вращения в зависимости от геометрических параметров ребер. Проведена верификация аналитических зависимостей расчета параметров сопла с ребрами путем сравнения с результатами численного моделирования в Ansys Fluent. Различие между численным решением и аналитическими зависимостями составило не более 3,2 %.

Исследована устойчивость активно-реактивного снаряда с моментом вращения РДТТ и без него. При доле тяги на вращательный момент, равной 5 %, повышение угловой скорости снаряда позволило сохранить устойчивость движения на всей траектории.

Список литературы

1. *Русяк, И. Г.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах / И. Г. Русяк, А. М. Липанов, В. М. Ушаков. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. – 456 с.
2. *Дмитриевский, А. А.* Внешняя баллистика. – Москва : Машиностроение, 1972. – 584 с.
3. *Королев, С. А.* Исследование пределов повышения дальности стрельбы активно-реактивным снарядом / С. А. Королев, Р. Р. Мансуров // Проектирование систем вооружения и измерительных комплексов : труды 19-й Всероссийской научно-технической конференции. – Нижний Тагил, 2023. – С. 159–170.
4. Баллистика ракетного и ствольного оружия: учебник для вузов / под ред. А. А. Королева, В. А. Комочкова; науч. конс. В. А. Шурыгин. – Волгоград, 2010. 472 с.
5. *Королев, С. А.* К вопросу обеспечения устойчивости движения активно-реактивного снаряда на траектории / С. А. Королев, Р. Р. Мансуров // Калашниковские чтения : материалы IX Всероссийской научно-практической конференции. – Ижевск, 2022. – С. 146–153.
6. *Балаганский, И. А.* Основы баллистики и аэродинамики : учеб. пособие / И. А. Балаганский. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. – 200 с.
7. *Королев, С. А.* Решение задачи максимизации дальности полёта активно-реактивного снаряда с учетом устойчивости движения на всей траектории / С. А. Королев, Р. Р. Мансуров // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах (ICOC'2023) : сборник трудов одиннадцатой всероссийской конференции и школы-семинара молодых ученых и студентов, Ижевск, 2024. – С. 99–107.

Разработка интеллектуальной системы восстановления траектории движения снаряда по зафиксированному участку траектории

И. Р. Подлесных, В. Г. Суфиянов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Одной из важных задач контрбатарейной борьбы является восстановление точки стрельбы по зафиксированному участку траектории. В докладе представлены результаты разработки интеллектуальной системы, основанной на нейросетевом моделировании, для восстановления траектории движения снаряда по зафиксированному участку траектории с целью определения координат точки стрельбы. Сформулирована математическая постановка обратной задачи внешней баллистики с использованием нейронных сетей глубокого обучения. Рассмотрены особенности предобработки данных для решения обратной задачи внешней баллистики. Проведен обзор литературы и анализ методов восстановления траектории снаряда с использованием рекуррентных нейронных сетей (RNN) с различными механизмами внимания. Подготовлен набор данных для обучения нейронных сетей на основе решения прямой задачи внешней баллистики при различных начальных параметрах стрельбы. Были исследованы различные архитектуры нейронных сетей с целью повышения точности восстановления точки стрельбы при наличии ошибок измерений. В результате проведения исследований определена наилучшая архитектура рекуррентной нейронной сети с механизмом внимания LSTM.

Ключевые слова: снаряд, траектория, нейронные сети, восстановление траектории, определение точки старта.

Введение

В условиях возрастающих требований к обеспечению обороноспособности и ведению контрбатарейной борьбы задача восстановления полной траектории полета снаряда по ограниченному числу наблюдений приобретает особую актуальность. Современные методы численного интегрирования, такие как схемы Рунге – Кутты, демонстрируют ограниченную устойчивость при наличии зашумленных или неполных данных. В этом контексте особенно перспективным направлением становится применение рекуррентных нейронных сетей, в частности архитектур LSTM и GRU, способных эффективно моделировать динамику временных рядов. Гейтовая структура таких моделей обеспечивает сохранение ключевых характеристик траектории, снижая влияние помех и измерительных искажений. Интеллектуальные системы на основе LSTM демонстрируют высокую точность восстановления начальных условий и прогнозирования дальнейшего полета в условиях ограниченной информации, что имеет важное значение для оперативной корректировки огня, анализа эффективности применения боеприпасов и планирования боевых действий.

Интеграция физико-математических моделей с нейросетевыми подходами открывает путь к построению гибридных решений, сочетающих вычислительную эффективность и прикладную ценность в задачах внешней баллистики.

1. Математическая модель внешней баллистики

Решение прямой задачи внешней баллистики заключается в вычислении траектории движения снаряда при определённых, установленных начальных условиях и параметров (углы наведения, начальная скорость, различные характеристики снаряда, геолокационные, геофизические, атмосферные и другие данные).

Точность результата решения прямой задачи внешней баллистики зависит от количества факторов и их полноты, учитываемых при моделировании [1–3]. Особенно от аэродинамических коэффициентов, точности задания внешних условий, качества и точности работы численных методов.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с точкой стрельбы (место расположения стреляющей установки) и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 1).

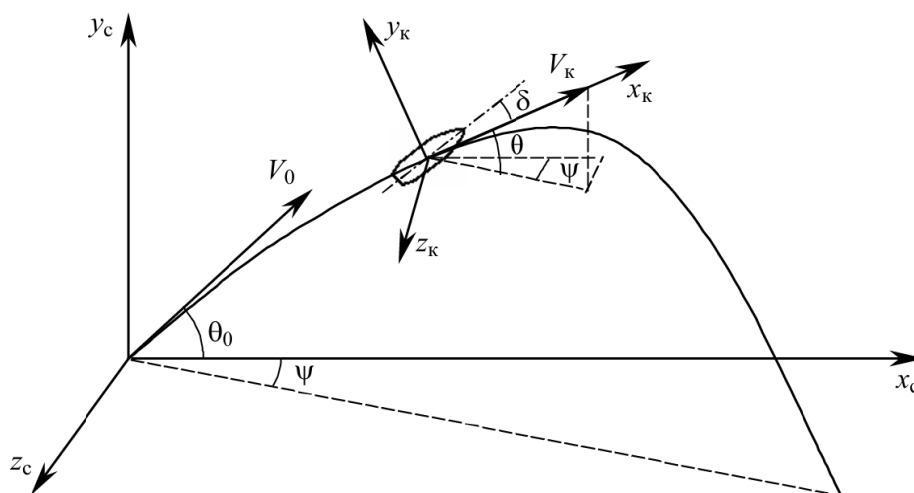


Рис. 1. Ориентация стартовой ($Ox_c y_c z_c$) и траекторной ($Ox_k y_k z_k$) систем координат

Координаты центра масс снаряда определяются уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= V_k \cos \theta \cos \psi, \\ \frac{dy_c}{dt} &= V_k \sin \theta, \\ \frac{dz_c}{dt} &= -V_k \cos \theta \sin \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_c – дальность; y_c – высота полета; z_c – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; V_k – скорость центра масс снаряда.

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_k y_k z_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1):

$$\frac{dV_k}{dt} = -g \sin \theta - \frac{C_{xk} q S_m}{m}; \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{yk} q S_m}{m V_k} + \frac{d\theta_g}{dt}; \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{C_{zk} q S_m}{m V_k \cos \theta} + \frac{d\psi_g}{dt}. \quad (4)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести; C_{xk} , C_{yk} , C_{zk} – коэффициенты составляющих аэродинамической силы по осям траекторной системы координат;

$q = \frac{\rho M^2 a^2}{2}$ – скоростной напор воздуха; M – число Маха; a – скорость звука

в воздухе; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделевого сечения снаряда; d – калибр снаряда; m – масса снаряда; θ_g , ψ_g – поправки, связанные с учетом геофизических параметров Земли [1]

2. Обратная задача внешней баллистики

В общем виде решение обратной задачи внешней баллистики заключается в определении угла стрельбы θ и дирекционного угла a_u при известных начальных условиях (расположении цели, скорости и направлении перемещения). Важную роль в решении обратной задачи внешней баллистики, а именно в определении начальных условий, играет точность решения прямой задачи внешней баллистики.

Обратная задача заключается в нахождении обратного преобразования

$$Q = (\theta_c, a_u, P_k, \tau_\Sigma) = \Phi^{-1}(P_0, P_u^0, V_u, A), \quad (5)$$

где $P_u^0 = (X_u^0, Y_u^0, Z_u^0)$ – начальные координаты цели; $V_u = (V_{1u}, V_{2u}, V_{3u})$ – вектор скорости перемещения цели в геодезической системе координат. В данном случае время τ_Σ определяется суммой времени решения обратной задачи τ_p , времени наведения орудия τ_n и времени полета снаряда t_k : $\tau_\Sigma = \tau_p + \tau_n + t_k$.

В решении обратной задачи рассматривают два основных подхода. Первый вариант – это использование итерационного метода последовательных приближений, который основан на методе хорд. В этом случае на каждом шаге итерационного алгоритма возникает необходимость решать прямую задачу внешней баллистики. Данный способ дает возможность найти решение задачи при любых заданных условиях стрельбы и позволяет достичь любой требуемый уровень точности. Однако при использовании данного метода время расчетов может играть существенную роль с точки зрения погрешности прогнозирования положения цели в момент ее предполагаемой встречи со снарядом [4, 5].

Второй подход к решению обратной задачи внешней баллистики основан на применении предварительно обученных аппроксиматоров (методов эмпирического моделирования) для различных диапазонов начальных условий стрельбы. После того как аппроксиматор построен, вычисление обратной задачи сводится к простой оценке невырожденной функции Φ^{-1} , что позволяет ускорить расчеты реакции системы по сравнению с итерационными методами и снизить вычислительную нагрузку. Однако данный метод требует для использования наличия большой выборки просчитанных траекторий снаряда.

3. Контрбатарейная борьба

Задача контрбатарейной борьбы заключается в своевременном определении местоположении огневых позиций противника, на основании анализа данных, полученных с радиолокационных станций (РЛС), акустических и других различных разведывательных систем.

Одной из самых важных частей данной задачи является восстановление точки стрельбы и построение полной траектории полёта снаряда по зафиксированному РЛС участку траектории. В данной постановке эту задачу можно отнести к классу обратных задач внешней баллистики. Решение данной задачи усложняется тем, что в большинстве случаев неизвестны параметры зафиксированного снаряда, и его координаты могут быть зафиксированы с некоторой погрешностью.

Существуют и широко используются методы решения задачи восстановления траектории движения снаряда по её, зафиксированному участку. К традиционным методам можно отнести методы экстраполяции, фильтрации Калмана, цепи Маркова, численное моделирование внешней баллистики. Обычно процесс решения обратной задачи можно описать следующими тремя этапами:

1) фиксация радиолокационной станцией (РЛС) с определенной частотой дискретизации участка траектории на восходящем сегменте полета в виде последовательности пространственно-временных координат;

2) оценка баллистических характеристик снаряда на основе упрощенной физической модели и алгоритмов фильтрации;

3) восстановление полной траектории и определение точки выстрела с использованием уточненной модели движения [6].

Рассмотрим прямоугольные системы координат: земную $O_3x_3y_3z_3$, связанную с точкой расположения РЛС O_3 , и стартовую $O_cx_cy_cz_c$, связанную с точкой стрельбы O_c (рис. 2).

В начале земной системы O_3 находится РЛС, которая фиксирует участок траектории полета снаряда. Ось O_3x_3 направлена горизонтально на север, ось O_3z_3 ей перпендикулярна и направлена на восток, ось O_3y_3 направлена вертикально.

Началом стартовой системы координат O_c является неизвестная точка стрельбы, то есть положение орудия откуда производится выстрел. Ось O_cx_c

направлена горизонтально по направлению выстрела, ось $O_c z_c$ ей перпендикулярна, ось $O_c y_c$ направлена вертикально вверх.

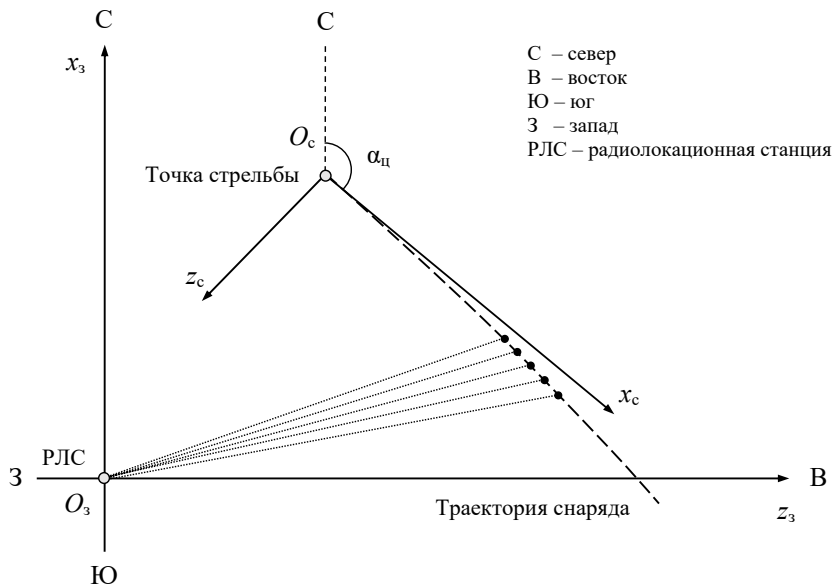


Рис. 2. Системы координат $O_3x_3y_3z_3$ и $O_cx_cy_cz_c$

Будем предполагать, что плоскость стартовой системы $O_cx_cz_c$ совпадает с плоскостью $O_3x_3z_3$, то есть высота точки стрельбы O_c относительно $O_3x_3y_3z_3$ равна нулю.

Исходными данными являются координаты траектории снаряда, зафиксированные в сферической системе координат РЛС:

$$\begin{pmatrix} t_{10} & r_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ t_{20} & r_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n0} & r_n & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где t_{i0} – моменты времени фиксации траектории; r_i – расстояние до цели; α_i – азимут цели; β_i – угол места цели; n – количество зафиксированных точек, $i = \overline{1, n}$.

Решением обратной задачи являются координаты точки стрельбы O_c в декартовой системе координат РЛС:

$$O_c = (x_c, y_c, z_c), \quad (7)$$

и восстановленная траектория движения снаряда в земной системе координат.

Из рассмотренного выше предположения о совпадении плоскостей $O_cx_cz_c$ и $O_3x_3z_3$ следует, что высота точки стрельбы $y_c = 0$.

4. Нейронная сеть глубокого обучения для получения точки выстрела и восстановления полной траектории по траекторным измерениям

Рассмотрим задачу восстановления точки выстрела и полной баллистической траектории по траекторным измерениям (участку траектории) с использованием рекуррентной нейронной сети глубокого обучения. В работе шаг по времени был равным $\Delta t_x = 2$ с.

На вход нейронной сети будем подавать сигналы в системе координат снаряда:

$$X = \begin{pmatrix} t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ t_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где t_i, x_i, y_i, z_i – время фиксации и координаты зафиксированных точек, $i = \overline{1, n}$. Считаем, что момент начала фиксации траектории, а также координаты в x и z равны нулю $t_1 = x_1 = z_1 = 0$, а $y_1 = \text{const}$, будет получен, как высота снаряда в момент первой фиксации.

На выходе необходимо получить точку выстрела и предыдущую точку траектории:

$$Y = \begin{pmatrix} t_c & x_c & y_c & z_c \\ t_0 & x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где t_c, x_c, y_c, z_c – время фиксации и координаты точки выстрела; t_0, x_0, y_0, z_0 – время фиксации и предыдущая точка траектории для последовательности X .

В процессе обучения шаг по времени между $t_1 - t_0$ был равен двум секундам, следовательно модель возвращает точку старта и координаты точки, за две секунды до первой фиксации снаряда.

На вход и выход нейронной сети подаются нормированные данные. Нормализация выполняется по формуле:

$$\hat{x} = N(x) = \frac{x}{x_{\max}}. \quad (10)$$

Обратное преобразование (денормализация) данных осуществляется по формуле:

$$x = N^{-1}(\hat{x}) = \hat{x}x_{\max}. \quad (11)$$

В табл. 1 представлены параметры преобразования (нормализации и денормализации) данных.

Структура рекуррентной нейронной глубокого обучения представлена в табл. 2.

Таблица 1. Параметры преобразования данных

Координата	Максимальное значение
t	46
x	5938
y	3611
z	5941

Таблица 2. Структура рекуррентной нейронной сети

№ слоя	Тип слоя	Размер выходного слоя	Число параметров
0	Input	(32, 5, 4)	0
1	LSTM (1 слой)	(32, 5, 64)	17 408
2	Slice ($t = 5$)	(32, 64)	0
3	Linear (target, 64→32)	(32, 32)	2 080
4	ReLU	(32, 32)	0
5	Linear (target, 32→4)	(32, 4)	132
6	Linear (start, 64→32)	(32, 32)	2 080
7	ReLU	(32, 32)	0
8	Linear (start, 32→4)	(32, 4)	132
9	Output	(32, 4), (32, 4)	0

Из входного слоя input данные передаются на слой LSTM. После обработки последовательности слоем LSTM скрытое состояние последнего временного шага разделяется на два параллельно работающих полносвязных блока – fc_target и fc_start . Оба блока имеют идентичную структуру (два линейных слоя с активацией ReLU) и независимо друг от друга предсказывают координаты конечной (цели) и начальной (точки выстрела) точек траектории [7].

Процедура обучения осуществляется методом стохастического градиентного спуска Adam с использованием библиотеки Pytorch [8]. В качестве функции потерь используется среднеквадратическая ошибка (MSE).

Количество точек входного слоя задавалось равным $n = 5$. Общее число оцениваемых параметров нейронной сети: 21 832.

5. Результаты решения обратной задачи с использованием нейронной сети

5.1. Исходные данные и результаты обучения нейронных сетей

Рассмотрим решение задачи на примере ЗОФ34 – 120-мм снаряда. Исходные данные были получены в результате моделирования траектории с углом возвышения θ задавался в пределах от 5 до 70 градусов.

Набор исходных данных (X_i, Y_i) , $i = \overline{1, I}$ формировался из смоделированных траекторий ЗОФ34 – 120-мм снаряда [1]. В качестве входных данных X_i выбирались все участки траекторий длиной 10 с и шагом $\Delta t_x = 2$ с. Каждому выходному данному X_i соответствует Y_i – точка выстрела и предыдущая точка траектории с шагом в 2 секунды.

Пример зафиксированного участка траектории представлен на рис. 3.

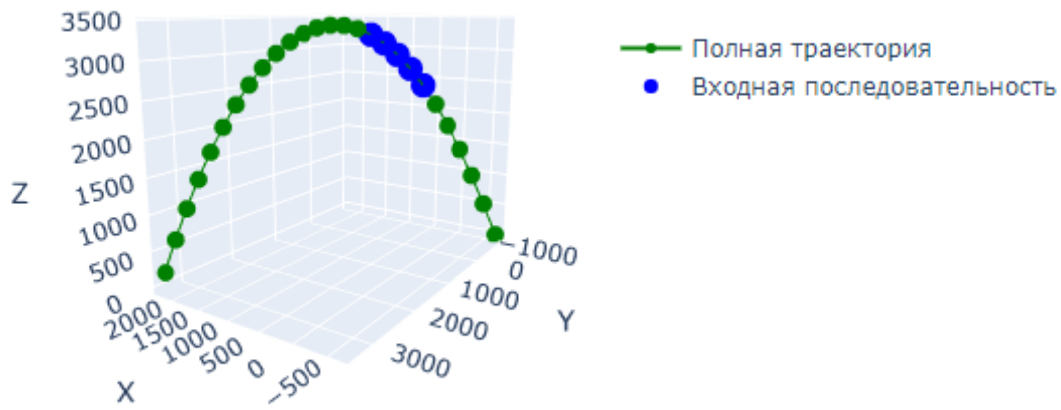


Рис. 3. Траектория снаряда Y_i и зафиксированный участок X_i в системе координат снаряда

В обучающий набор входило $J = 40000$ наблюдений, которые были разделены на независимые обучающую и тестовые выборки объемами соответственно, $J_0 = 32000$ и $J_T = 8000$. Обучение нейронной проходило до 200 итераций. Выбиралась наилучшая модель по тестовой выборке.

5.2. Применение нейронных сетей для определения точки старта

Рассмотрим результаты применения модели. Рассмотрим одну из траекторий, данные будут представлены в системе координат снаряда.

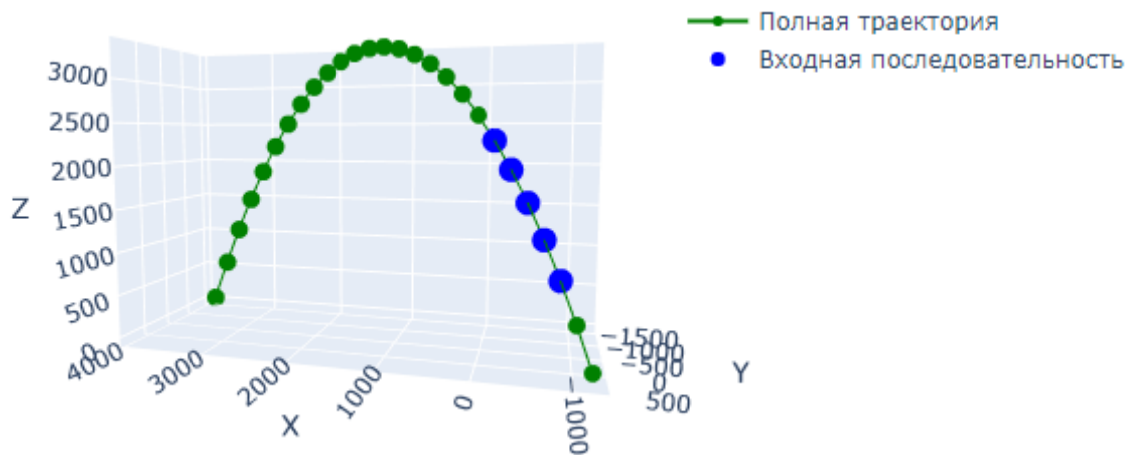


Рис. 4. Траектория снаряда Y_i и зафиксированный участок X_i в системе координат снаряда

Результаты предсказаний в трехмерном виде представлены на рис. 5.

В данном случае модель предсказала, что точка выстрела находилась в координатах $x = 3285, z = -1274.5$, а на самом деле точка выстрела была в точке $x = 3277.8, z = -1285.765$, что означает, что модель ошиблась на 18,456 метров.

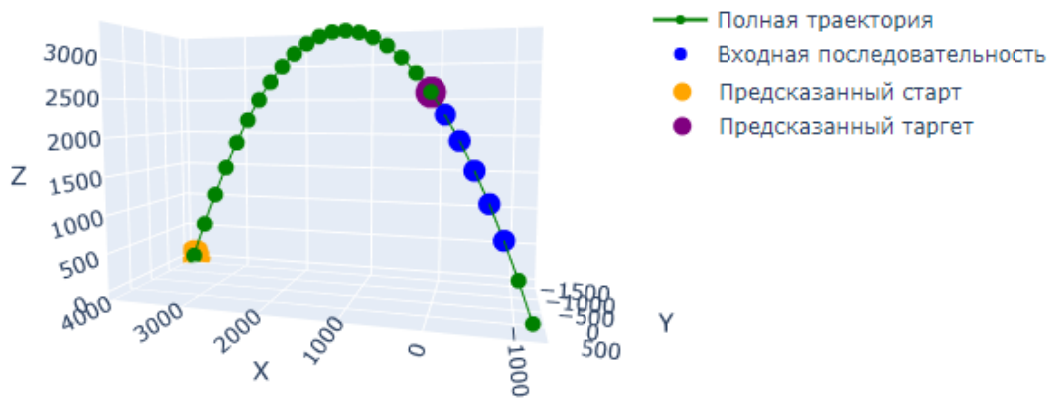


Рис. 5. Определенные точки старта и предыдущая точка траектории

Поскольку модель возвращает только одну предыдущую точку траектории, для построения полной траектории был составлен следующий алгоритм: Модель на вход, получает набор из 5 точек, и возвращает одну предыдущую, после полученная предыдущая точка подается как часть новой последовательности, в общем виде алгоритм можно представить следующим образом:

1) На вход модель принимает участок траектории $T = (P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}, P_{i+4})$, где $P_i = (t_i, x_i, y_i, z_i)$.

2) Модель возвращает точки P_{i-1} и P_c , где P_c – предсказанная моделью точка стрельбы.

3) Если $y_c \leq y_{i-1}$, то формируется новая входная последовательность $T = (P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3})$, иначе полная траектория построена.

Результат работы данного алгоритма представлен на рис. 6.

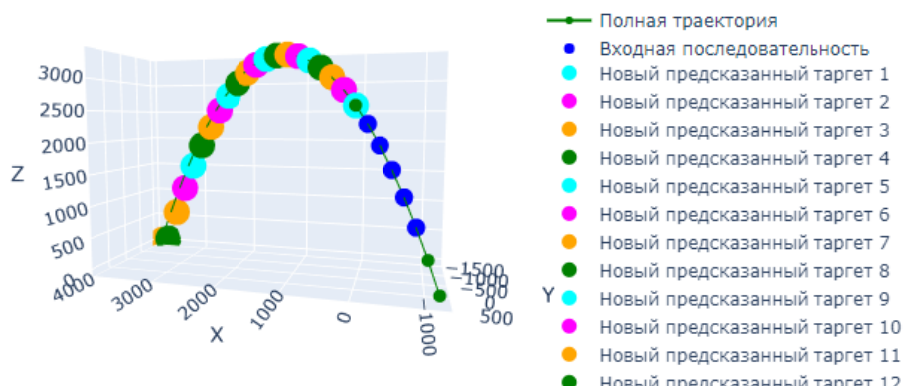


Рис. 6. Полная построенная траектория

5.3. Оценка среднеквадратического отклонения в зависимости от среднеквадратического отклонения измерений σ .

Анализ восстановления точек стрельбы проводился на тестовой выборке при заданном СКО погрешностей измерения σ .

Оценка СКО проводилась методом статистических испытаний по 30 опытов при различных σ . На рис. 7 представлено распределение восстановленных точек стрельбы относительно истинного значения $\sigma = 5$. СКО δ восстановлен-

ных точек $\mathbf{d}_i = (x_i, z_i)$ от реальной точки выстрела $\mathbf{d}_0 = (x_0, z_0)$ рассчитывалось по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\|^2},$$

где $\|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\|$ – евклидово расстояние между точками, которое определяется по формуле $\|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_0\| = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$.

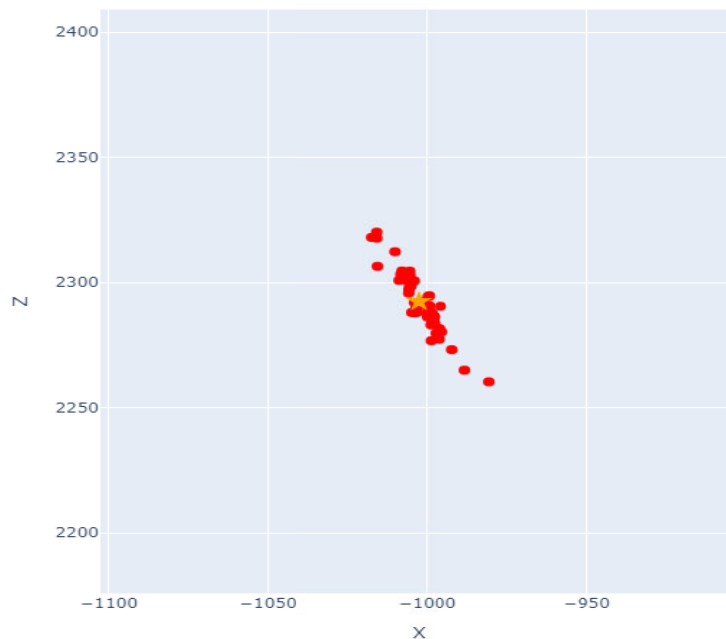


Рис. 7. Распределение точек стрельбы ($\sigma = 5$)

На рис. 8 представлены значения СКО δ в зависимости от СКО погрешностей измерения σ .

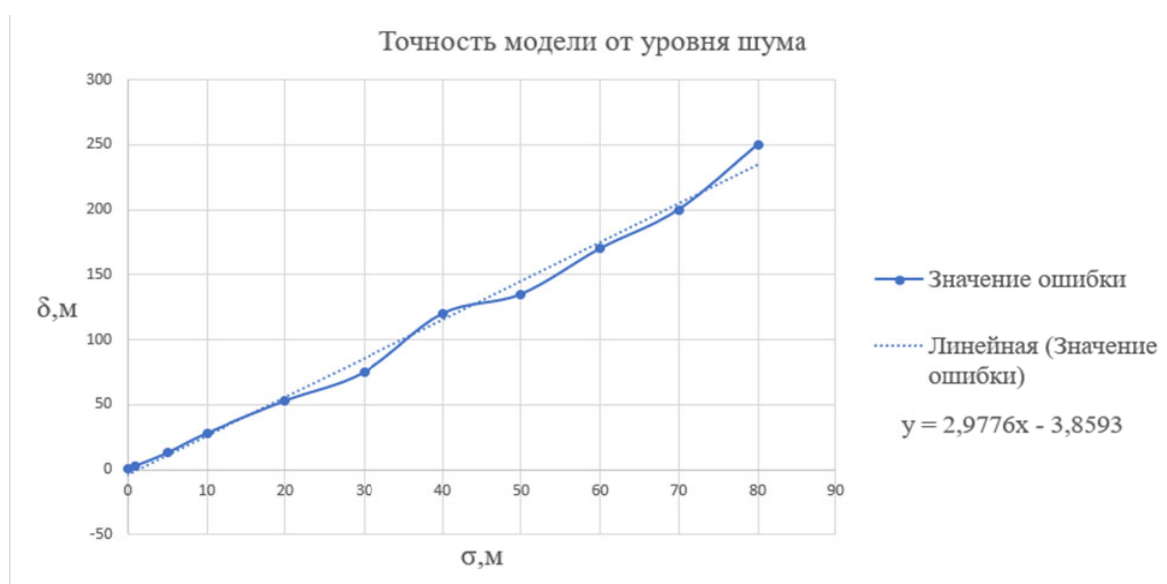


Рис. 8. Зависимость разброса восстановленных точек стрельбы от ошибок измерения траекторий σ

Результаты исследований показали, что СКО координат точки выстрела δ практически линейно возрастает с увеличением ошибки измерения координат снаряда σ коэффициент отношения $\chi = \frac{\delta}{\sigma} \approx 2,9$.

Заключение

В работе представлена интеллектуальная система восстановления траектории движения артиллерийского снаряда по ограниченному числу зафиксированных точек с использованием рекуррентной нейронной сети с архитектурой LSTM. Предложенная модель решает обратную задачу внешней баллистики, обеспечивая приемлемую точность определения точки выстрела и восстановления полной траектории даже при наличии измерительных шумов. Определены точность восстановления траекторий, точки стрельбы и точки падения снаряда в зависимости от величины случайных ошибок измерений. Показано, что ошибка восстановления прямо пропорциональна погрешность измерения с коэффициентом 2,9.

Список литературы

1. *Дмитриевский, А. А.* Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко. – Москва : Машиностроение, 2005. – 608 с.
2. Расчет траектории движения снаряда в атмосфере с учетом гидродинамики его обтекания / И. Г. Русяк, А. И. Карпов, С. А. Королев, С. А. Карсканов // Вопросы оборонной техники. Серия 14. – 2015. – Вып. 2. – С. 130–141.
3. Программный комплекс для моделирования внутренней и внешней баллистики артиллерийского выстрела / И. Русяк, В. Суфиянов, С. Королев, М. Ермолаев // Материалы Международной конференции по военным технологиям ISMT 2015, Брно, Чехия, 19–21 мая 2015 г. / Военная академия, Брно. – Брно, 2015. – С. 9–17. – DOI: 10.1109/MILTECHS.2015.7153682.
4. *Ермолаев, С. И.* Внешняя баллистика / С. И. Ермолаев, Л. Б. Комаров, Е. В. Чурбанов. – Ленинград : ВМАКВ им. А. М. Крылова, 1958. – 688 с.
5. *Коновалов, А. А.* Внешняя баллистика / А. А. Коновалов, Ю. В. Николаев. – Ижевск : Изд-во ИПМ УрО РАН, 2003. – 191 с.
6. Hou Lh., Liu Hj. An End-to-End LSTM-MDN Network for Projectile Trajectory Prediction. In: Cui, Z., Pan, J., Zhang, S., Xiao, L., Yang, J. (eds) Intelligence Science and Big Data Engineering. Big Data and Machine Learning. IScIDE 2019. Lecture Notes in Computer Science. – Vol 11936. – 2019. – Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-36204-1_9.
7. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. Глубокое обучение / И. Гудфеллоу, Й. Бенджио, А. Курвиль. – Москва : Вильямс, 2018. – 856 с. – ISBN: 978-5-8459-2001-0.
8. *Паттерсон, Дж.* Глубокое обучение / Дж. Паттерсон, А. Гибсон. – Санкт-Петербург : Питер, 2018. – 592 с.

Исследование влияния баллистических параметров и геометрической формы пороховых элементов на дальность стрельбы при заданных ограничениях

Д. А. Рылов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе представлены результаты исследования влияния геометрических характеристик пороховых элементов на баллистические параметры выстрела с целью обеспечения максимальной дальности полета снаряда. Рассмотрены ключевые факторы, определяющие эффективность горения порохового заряда, включая размер и форму пороховых элементов, а также их влияние на внутри- и внешнебаллистические процессы. Проведено исследование оптимальности массы порохового заряда для обеспечения максимальной дульной скорости снаряда, а также исследование оптимальности массы снаряда на максимальную дальность стрельбы в условиях ограничений по максимальному давлению в камере орудия.

Ключевые слова: внутренняя баллистика, внешняя баллистика, математическая модель, дульная скорость снаряда, дальность стрельбы, прогрессивность горения порохов.

Введение

Совершенствование характеристик стрельбы, в частности увеличение дальности полета снаряда, остается одной из ключевых задач в области проектирования артиллерийских систем и боеприпасов. Важными факторами, определяющими баллистику выстрела, являются параметры порохового заряда, включая его геометрическую форму, размеры. Влияние этих параметров на процесс формирования давления в канале ствола непосредственно сказывается на начальной скорости снаряда, а следовательно, и на его максимальной дальности полета. Также немаловажным фактором, влияющим на дальность стрельбы, является масса снаряда. Цель данной статьи – найти оптимальные значения баллистических параметров и геометрических характеристик пороха для обеспечения максимальной дальности выстрела.

Математическая модель внутренней баллистики выстрела

В качестве допущений при решении задачи внутренней баллистики полагается, что воспламенитель массой ω_v сгорает мгновенно и создает начальное давление p_v . При этом теплофизические параметры продуктов горения воспламенителя совпадают с параметрами продуктов горения основного заряда. Массой воздуха в камере сгорания пренебрегается. Основной заряд, состоящий из зерненного или трубчатого пороха, воспламеняется сразу по всей поверхности в момент полного сгорания воспламенителя. Снаряд начинает двигаться

после достижения в камере давления форсирования p_ϕ ($p_\phi \geq p_b$). Теплообменом с горячей поверхностью заряда пренебрегается (скорость тепловой волны равна скорости горения). Трение и теплообмен продуктов горения с поверхностью канала ствола не учитывается.

Основная задача внутренней баллистики рассматривалась в постановке работы [1, 2], где в рамках допущений, принятых выше, учтены распределения давления и скорости газопороховой смеси по заснарядному пространству для канала переменного сечения.

В рамках обозначений, принятых в [1, 2], система уравнений имеет вид:

1. Уравнение горения:

– до фазы распада пороховых элементов $z \leq 1$ или $\psi \leq \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_k}{e_1}, \quad \sigma(z) = 1 + 2\lambda z + 3\mu z^2, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(z) u_k; \quad (1)$$

– после распада пороховых элементов $\psi > \psi_p = \kappa(1 + \lambda + \mu)$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad \sigma(\psi) = \sigma(\psi_p) \sqrt{\frac{1-\psi}{1-\psi_p}}, \quad \psi_p \leq \psi \leq 1, \quad (2)$$

$$\sigma(\psi_p) = 1 + 2\lambda + 3\mu.$$

2. Уравнение движения:

$$v_{\text{CH}} = 0, \text{ если } p_{\text{CH}} \leq p_\phi;$$

$$q \frac{dv_{\text{CH}}}{dt} = S_{\text{KH}} (p_{\text{CH}} - p_{\text{пр}}), \text{ если } p_{\text{CH}} > p_\phi; \quad (3)$$

$$p_{\text{пр}} = p_{\text{H}} \left(1 + \frac{k_{\text{B}} + 1}{4} k_{\text{B}} \frac{v_{\text{CH}}^2}{c_{\text{B}}^2} + k_{\text{B}} \frac{v_{\text{CH}}}{c_{\text{B}}} \sqrt{1 + \left(\frac{k_{\text{B}} + 1}{4} \right)^2 \frac{v_{\text{CH}}^2}{c_{\text{B}}^2}} \right);$$

$$\frac{dl_{\text{CH}}}{dt} = v_{\text{CH}}.$$

3. Уравнение энергии:

$$p \left[W_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha (\omega_{\text{B}} + \omega \psi) \right] = (\omega_{\text{B}} + \omega \psi) f_1 - \left[1 + \frac{(\omega_{\text{B}} + \omega)}{q} J_1 \right] \theta q \frac{v_{\text{CH}}^2}{2}. \quad (4)$$

4. Уравнение состояния:

$$p \left[W_{\text{CH}} - \frac{\omega}{\delta} (1 - \psi) - \alpha (\omega_{\text{B}} + \omega \psi) \right] = (\omega_{\text{B}} + \omega \psi) RT. \quad (5)$$

$$W_{\text{CH}} = W_{\text{KM}} + S_{\text{CH}} l_{\text{CH}}.$$

5. Дополнительные соотношения:

$$p_{\text{CH}}(t) = \frac{p(t) + (\omega_{\text{B}} + \omega) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \left[\frac{1}{2} J_1 + J_2(x_{\text{CH}}) - J_3 - \frac{1}{2} \right]}{1 + \frac{(\omega_{\text{B}} + \omega)}{q} [J_2(x_{\text{CH}}) - J_3]}, \quad (6)$$

$$p_{\text{KH}}(t) = p_{\text{CH}}(t) \left[1 + \frac{(\omega_{\text{B}} + \omega)}{q} J_2(x_{\text{CH}}) \right] + (\omega_{\text{B}} + \omega) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \left[\frac{1}{2} - J_2(x_{\text{CH}}) \right],$$

$$p(x,t) = p_{\text{KH}}(t) - \left[\frac{(\omega_{\text{B}} + \omega) p_{\text{CH}}}{q} - (\omega_{\text{B}} + \omega) \frac{v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}} \right] J_2(x) - \frac{1}{2} (\omega_{\text{B}} + \omega) \frac{S_{\text{KH}}^2 v_{\text{CH}}^2}{W_{\text{CH}}^3} \frac{W^2(x)}{S^2(x)},$$

$$v(x,t) = \frac{W(x)}{S(x)} \frac{S_{\text{KH}} v_{\text{CH}}}{W_{\text{CH}}}, \quad W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi, \quad W_{\text{CH}} = W_{\text{KM}} + S_{\text{CH}}(x_{\text{CH}} - L_{\text{KM}}),$$

$$\rho(t) = \frac{p(t)}{RT + \alpha p(t)},$$

$$J_1 = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^3} \int_0^{x_{\text{CH}}} \frac{W^2(x)}{S(x)} dx, \quad J_2(x) = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^2} \int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi, \quad J_2(x_{\text{CH}}) = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^2} \int_0^{x_{\text{CH}}} \frac{W(x)}{S(x)} dx,$$

$$J_3 = \frac{S_{\text{KH}}^2}{W_{\text{CH}}^3} \int_0^{x_{\text{CH}}} \left(\int_0^x \frac{W(\xi)}{S(\xi)} d\xi \right) S(x) dx, \quad W(x) = \int_0^x S(\xi) d\xi.$$

6. Начальные условия:

при $t = 0, 0 \leq x \leq L_{\text{KM}}$

$$p = p_{\text{B}} = \frac{\omega_{\text{B}} f}{W_{\text{KM}} - \frac{\omega}{\delta} - \alpha \omega_{\text{B}}}, \quad T = T_{\text{v}}, \quad v_{\text{CH}} = 0, \quad l_{\text{CH}} = 0, \quad \psi = 0. \quad (7)$$

Для моделирования внешней баллистики в качестве допущений принимается, что снаряд движется в плоскости метания, боковое отклонение отсутствует, движение снаряда происходит в условиях стандартной атмосферы с переменными по высоте параметрами; коэффициент лобового сопротивления определяется по закону 1943 года [3]. В рамках обозначений, принятых в [3, 4], система уравнений имеет вид:

– координаты центра масс снаряда:

$$\frac{dX_{\text{CH}}}{dt} = V_{\text{CH}} \cos \theta_{\text{CH}}, \quad \frac{dY_{\text{CH}}}{dt} = V_{\text{CH}} \sin \theta_{\text{CH}}, \quad (8)$$

$$X_{\text{CH}}(0) = 0, \quad Y_{\text{CH}}(0) = 0; \quad (9)$$

– параметры движения снаряда:

$$\frac{dV_{\text{CH}}}{dt} = -g \sin \theta_{\text{CH}} - \frac{C_x q S_M}{m_{\text{CH}}}, \quad \frac{d\theta_{\text{CH}}}{dt} = -\frac{g \cos \theta_{\text{CH}}}{V_{\text{CH}}}, \quad (10)$$

$$V_{\text{CH}}(0) = \theta_{\text{CH}0} = v_{\text{д}}, \quad \theta_{\text{CH}}(0) = \theta_{\text{CH}0}. \quad (11)$$

Методы численного интегрирования уравнений внутренней баллистики и внешней баллистики рассмотрены в работе [5].

Влияния баллистических параметров и геометрической формы пороховых элементов на дальность стрельбы

Исследования проводились для пушки калибра 152 мм, в рамках которых были получены оценки влияния массы заряда на дульную скорость, а также

влияние массы снаряда на дальность стрельбы. Расчеты были проведены с ограничением на максимальное давление в канале ствола $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329 \text{ МПа}$. Расчеты проводились для зерновых и трубчатых пороховых элементов.

На рис. 1 представлена зависимость дульной скорости от массы заряда, состоящего из 7-канального зернового пороха. Видно, что существует оптимальная масса заряда, при которой достигается максимальное значение дульной скорости снаряда.



Рис. 1. Зависимость дульной скорости от массы зернового порохового заряда

Аналогичный поиск был проведен для заряда, состоящего из пороховых элементов трубчатой формы (рис. 4).

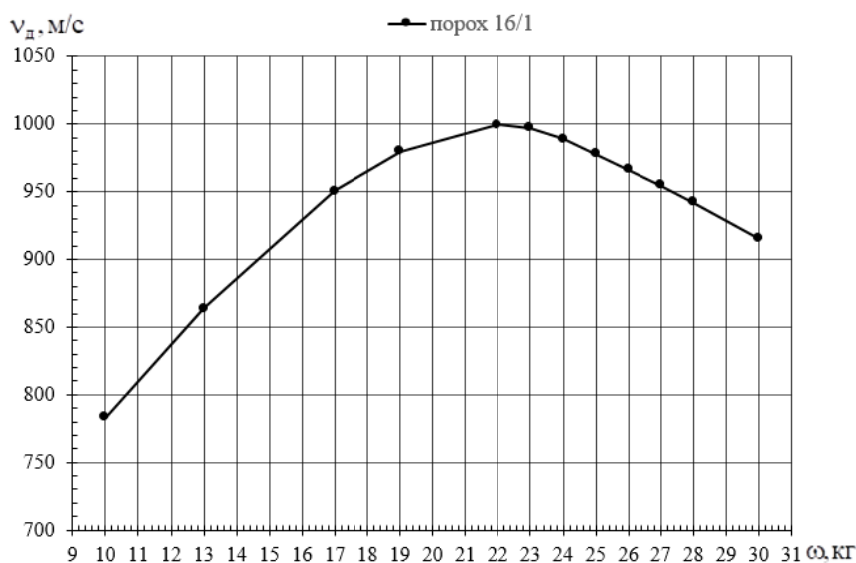


Рис. 2. Зависимость дульной скорости от массы трубчатого порохового заряда

В табл. 1 и 2 представлены численные результаты поиска оптимальной массы заряда для обеспечения максимальной дульной скорости для различных видов пороховых зарядов.

Таблица 1. Влияние массы заряда зерненого пороха на дульную скорость снаряда при $(p_{кн})_{max} = 329$ МПа

№ п/п	ω , кг	v_d , м/с	$2e_1$, м
1	17	909,23	0,001895
2	19(штат.)	944,59	0,0022
3	22	983,94	0,002710
4	23	991,29	0,002905
5	24(оптим.)	994,50	0,003115
6	25	992,59	0,003345
7	26	984,17	0,003597

Таблица 2. Влияние массы заряда трубчатого пороха на дульную скорость снаряда при $(p_{кн})_{max} = 329$ МПа

№ п/п	ω , кг	v_d , м/с	$2e_1$, м
1	17	950,38	0,001373
2	19(штат.)	979,83	0,0016
3	22(оптим.)	999,53	0,001982
4	23	997,08	0,002124
5	24	989,06	0,002272
6	25	977,91	0,002429
7	26	966,44	0,002596

Исходя из результатов выявлены оценки оптимальности массы порохового заряда различных марок порохов на дульную скорость. Для зерненого пороха наилучшей массой заряда является $\omega = 24$ кг. А для трубчатого пороха – $\omega = 22$ кг. В табл. 3 и 4 представлено сравнение дальности стрельбы при штатных параметрах выстрела и оптимальных значениях массы пороха.

Таблица 3. Оптимизация дальности стрельбы от массы зерненого заряда

Условия выстрела	v_d , м/с	$(X_{сн})_{max}$, км	$\delta(X_{сн})_{max}$, %	δv_d , %
Штатные	944,59	28,45	7,5	5,3
Оптимальные	994,5	30,6		

Таблица 4. Оптимизация дальности стрельбы от массы трубчатого заряда

Условия выстрела	v_d , м/с	$(X_{сн})_{max}$, км	$\delta(X_{сн})_{max}$, %	δv_d , %
Штатные	979,84	29,9	2,9	2,01
Оптимальные	999,53	30,8		

Следующим этапом исследования являлась оценка влияния массы снаряда на дульную скорость и дальность стрельбы при том же ограничении на максимальное давление в канале ствола $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329 \text{ МПа}$.

На рис. 3 и 4 представлены графики зависимостей дульной скорости дальности стрельбы в зависимости от массы снаряда для зернового и трубчатого порохового заряда.

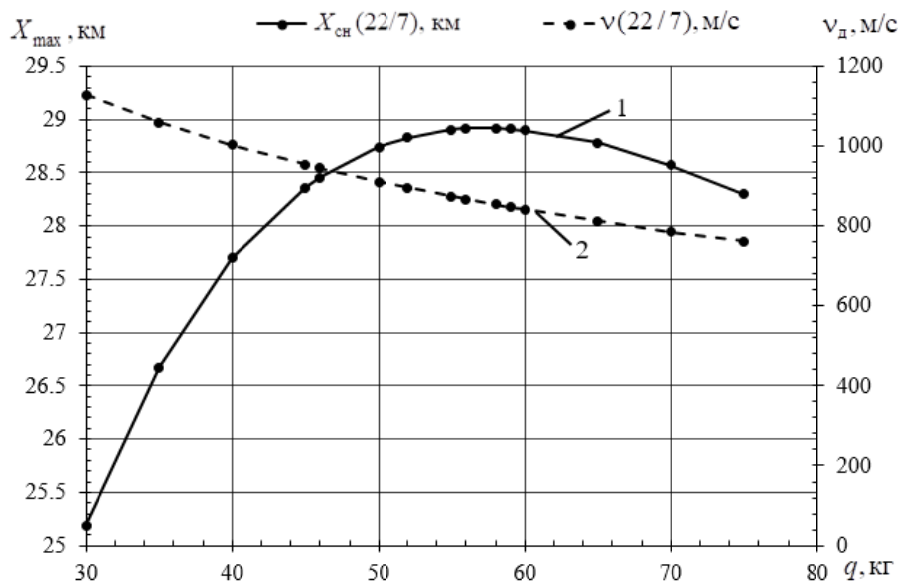


Рис. 3. Зависимость дальности стрельбы (1) дульной скорости (2) от массы снаряда

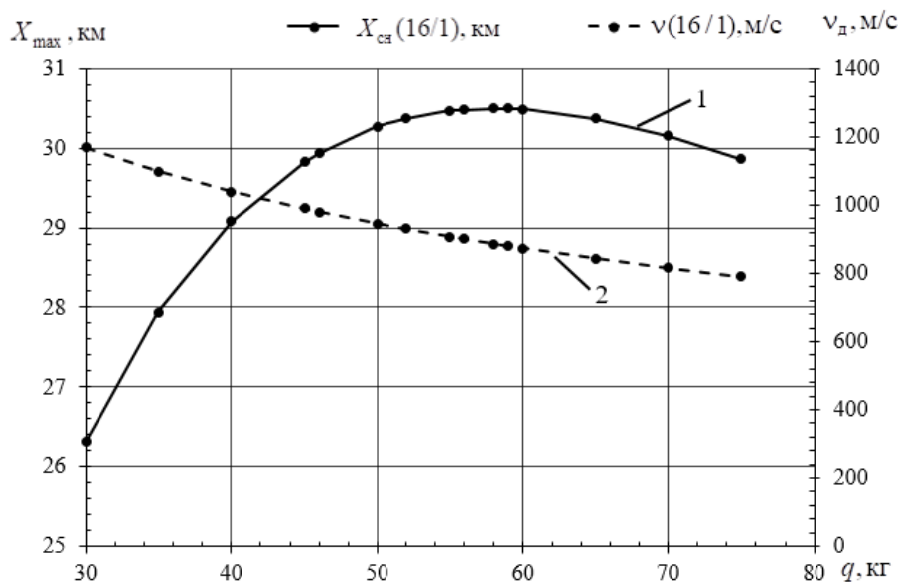


Рис. 4. Зависимость дальности стрельбы (1) дульной скорости (2) от массы снаряда

В табл. 5 и 6 представлены численные результаты поиска оптимальной массы снаряда для обеспечения максимальной дальности стрельбы

Таблица 5. Влияние массы снаряда на дульную скорость и дальность стрельбы для зерненого пороха при $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329$ МПа

№ п/п	q , кг	v_d , м/с	$2e_1$, м	$(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$, км
1	45	953.58	0.002177	28.360
2	46(штат.)	944.59	0.002200	28.454
3	50	911.35	0.002287	28.741
4	52	895.89	0.002330	28.826
5	55	874.28	0.002392	28.905
6	56	867.37	0.002412	28.915
7	58(оптим.)	854.08	0.002453	28.919
8	59	847.59	0.002474	28.909
9	60	841.32	0.002494	28.899

Таблица 6. Влияние массы снаряда на дульную скорость и дальность стрельбы для трубчатого пороха при $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329$ МПа

№ п/п	q , кг	v_d , м/с	$2e_1$, м	$(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$, км
1	45	989,14	0,001585	29,827
2	46(штат)	979,83	0,0016	29,935
3	50	945,31	0,00166	30,267
4	52	929,36	0,001689	30,374
5	55	906,89	0,001732	30,471
6	56	899,62	0,001746	30,482
7	58	885,83	0,001774	30,495
8	59(оптим.)	879,25	0,001787	30,497
9	60	872,75	0,001801	30,489

Проведенные исследования позволяют оценить влияние массы снаряда с зарядом различных марок порохов на дульную скорость и дальность стрельбы. Для зерненого пороха наилучшей массой снаряда является $q = 58$ кг при дульной скорости $v_d = 854,08$ м/с; для трубчатого $q = 59$ кг при дульной скоростью $v_d = 879,25$ м/с. В табл. 7 и 8 представлено сравнение дальности стрельбы при штатном выстреле и с оптимальной массой снаряда.

Таблица 7. Сравнение дальности стрельбы при штатном выстреле и с оптимальной массой снаряда для зерненого пороха

№ п/п	v_d , м/с	$(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$, км	$\delta(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$, %	δv_d , %
1	944,59	28,45	1,6	-10,59
2	854,08	28,92		

Таблица. 8. Сравнение дальности стрельбы при штатном выстреле и с оптимальной массой снаряда для грубчатого пороха

№ п/п	$v_d, \text{м/с}$	$(X_{\text{сн}})_{\text{max}}, \text{км}$	$\delta(X_{\text{сн}})_{\text{max}}, \%$	$\delta v_d, \%$
1	979,84	29,9	1,9	-10,61
2	879,25	30,5		

Следует отметить, что приведенные выше результаты получены последовательным решением двух одномерных задач оптимизаций: по массе заряда и массе снаряда. Представляет определенный интерес решение задачи двухпараметрической оптимизации с целью увеличения дальности стрельбы. Что может являться предметом отдельной статьи.

Заключение

1. Проведена оптимизация геометрических характеристик пороховых элементов и массы заряда. Показана возможность увеличения дальности стрельбы $(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$ при $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329 \text{ МПа}$:

- для пороха 22/7: $\tilde{\delta}(X_{\text{сн}})_{\text{max}} = 7,5 \%$;
- для пороха 16/1: $\tilde{\delta}(X_{\text{сн}})_{\text{max}} = 2,9 \%$.

2. Проведена оптимизация массы снаряда. Показана возможность увеличения дальности стрельбы $(X_{\text{сн}})_{\text{max}}$ при $(p_{\text{кн}})_{\text{max}} = 329 \text{ МПа}$:

- для пороха 22/7: $\tilde{\delta}(X_{\text{сн}})_{\text{max}} = 1,6 \%$;
- для пороха 16/1: $\tilde{\delta}(X_{\text{сн}})_{\text{max}} = 1,9 \%$.

Список литературы

1. Исследование возможности увеличения дальности стрельбы за счет баллистических факторов / И. Г. Русяк, С. А. Королев, Д. А. Клюкин, Р. Р. Мансуров // Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах (ICOC'2023). Липановские чтения : сборник трудов XI Всероссийской конференции и школы-семинара молодых ученых и студентов, Ижевск, 14–16 июня 2023 года. – Ижевск : УдмФИЦ УрО РАН, 2024. – С. 167–178.

2. Русяк, И. Г. Влияние размерности математической модели внутренней баллистики на расчетные параметры выстрела для зарядов из зерненого пороха / И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 73. – С. 95–110.

3. Коновалов, А. А. Внешняя баллистика / А. А. Коновалов, Ю. В. Николаев. – Москва : ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.

4. Королев, С. А. Исследование путей повышения дальности стрельбы ствольной артиллерии / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 185–191.

5. Рылов, Д. А. К вопросу о прогрессивности горения артиллерийских порохов // Сборник трудов XII всероссийской конференции по внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах (ICOC'2025)

посвящённая 90-летию академика Липанова А. М., Ижевск, 18–20 марта 2025 года. – Ижевск : УдмФИЦ УрО РАН (в печати).

6. Волков, Е. А. Численные методы. – Москва : Наука, 1987.

7. Вержбицкий, В. М. Основы численных методов. – Москва : Высш. шк., 2005.

8. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1990. – 512 с.

9. Русяк, И. Г. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах / И. Г. Русяк, А. М. Липанов, В. М. Ушаков. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. – 456 с.

10. Русяк, И. Г. Внутрикамерные гетерогенные процессы в твольных системах / И. Г. Русяк, В. М. Ушаков. – Екатеринбург : УрО РАН, 2001. – 259 с.

11. Королев, С. А. Исследование путей повышения дальности стрельбы ствольной артиллерии / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк // Вестник ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова. – 2018. – № 3, Т. 21. – С. 185–191.

12. Перспективы улучшения баллистических характеристик современных дальнобойных снарядов / В. Е. Смирнов, И. Е. Никитина, Л. А. Розанов, И. В. Кытманов // Оборонная техника. – 2017. – № 10. – С. 56–62.

Разработка алгоритма построения таблиц стрельбы на основе методов решения обратных задач внешней баллистики

К. С. Старков, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В рамках работы были изучены существующие методы решения обратной задачи внешней баллистики, были реализованы алгоритмы численного решения задачи. Разработан алгоритм построения таблиц стрельбы на основе методов решения обратных задач внешней баллистики. Проведено исследование сходимости численных методов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Реализовано создание структуры входных и выходных данных, заполнение базы данных для проведения вычислительного эксперимента. В результате работы создан программный модуль, реализующий решение обратной задачи внешней баллистики и построение таблиц стрельбы.

Ключевые слова: обратная задача внешней баллистики, численные методы, точность расчетов, внешние факторы.

Введение

Одной из ключевых задач внешней баллистики является обеспечение высокой точности поражения цели при стрельбе с различных расстояний и в различных условиях. Для этого традиционно используются таблицы стрельбы, в которых представлены необходимые углы прицеливания и поправки в зависимости от дальности, метеоусловий и характеристик снаряда. Однако построение таких таблиц требует сложных расчетов и учета множества факторов, включая сопротивление воздуха, вращение снаряда и влияние внешней среды [1, 2].

В данной работе рассматривается подход к автоматизированному построению таблиц стрельбы на основе решения обратной задачи внешней баллистики. В отличие от прямой задачи, где по заданным начальному углу и скорости определяется траектория полета, обратная задача позволяет определить необходимые начальные условия стрельбы для достижения заданной цели. Такой подход открывает возможности для создания адаптивных алгоритмов, способных формировать таблицы стрельбы в реальном времени с учетом текущих условий.

Целью исследования является разработка алгоритма, позволяющего строить таблицы стрельбы на основе численного решения обратной задачи внешней баллистики с учетом влияния аэродинамических и метеорологических факторов.

1. Математическая модель внешней баллистики

Прямая задача внешней баллистики заключается в расчете траектории движения снаряда при заданных начальных условиях и параметрах (углы наведения, начальная скорость, характеристики снаряда, геофизические и атмосферные данные и др.).

Точность решения прямой задачи внешней баллистики зависит от полноты факторов, учитываемых при моделировании. В частности, от учета вращения и колебаний относительно центра масс, точности определения аэродинамических коэффициентов метаемых тел, точности задания метеоусловий, точности используемых численных методов и др.

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат $Ox_c y_c z_c$, связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рис. 1).

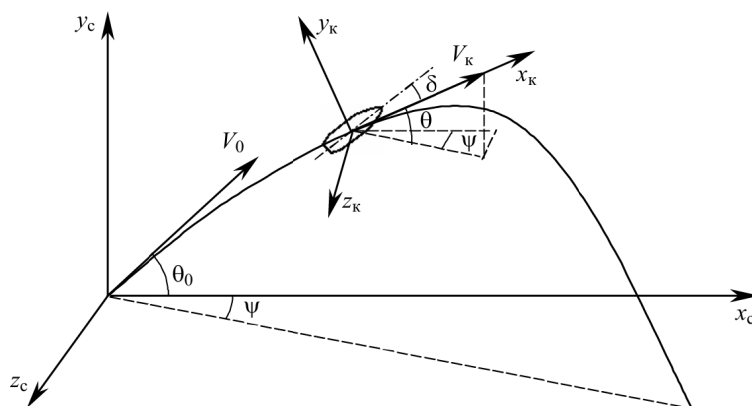


Рис. 1. Ориентация стартовой ($Ox_c y_c z_c$) и траекторной ($Ox_k y_k z_k$) систем координат

Координаты центра масс снаряда определяются уравнениями [3]

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= V_k \cos \theta \cos \psi, \\ \frac{dy_c}{dt} &= V_k \sin \theta, \\ \frac{dz_c}{dt} &= -V_k \cos \theta \sin \psi, \end{aligned} \quad (1)$$

где x_c – дальность; y_c – высота полета; z_c – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; V_k – скорость центра масс снаряда.

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат $Ox_k y_k z_k$, связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (рис. 1):

$$\begin{aligned}\frac{dV_k}{dt} &= -g \sin \theta - \frac{C_{x_k} q S_m}{m}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g \cos \theta}{V_k} - \frac{C_{y_k} q S_m}{m V_k} + \frac{d\theta_g}{dt}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{C_{z_k} q S_m}{m V_k \cos \theta} + \frac{d\psi_g}{dt}.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь g – ускорение силы тяжести; $C_{x_k}, C_{y_k}, C_{z_k}$ – коэффициенты составляющих аэродинамической силы по осям траекторной системы координат; $q = \frac{\rho M^2 a^2}{2}$ – скоростной напор воздуха; M – число Маха; a – скорость звука в воздухе; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь миделевого сечения снаряда; d – калибр снаряда; m – масса снаряда; θ_g, ψ_g – поправки, связанные с учетом геофизических параметров Земли [4].

2. Алгоритм решения обратной задачи внешней баллистики

Цель обратной задачи – найти угол возвышения ствола θ , при котором снаряд поразит цель на заданной дальности $X_{ц}$, при известных условиях стрельбы (начальная скорость V_0 , масса m и т. д.). Для решения задачи используется численный метод хорд [1], а также рассматриваются приближенные методы, описанные в работе [5].

Алгоритм решения обратной задачи состоит из следующих этапов:

1. Инициализация:

Задается допустимый диапазон углов:

$$\theta \in [a, b],\tag{3}$$

где $a = 0, b = \theta_{\max} = 45^\circ$.

Начальное приближение: $\theta_0 = b$.

2. Вычисление дальности полета X_k при текущем угле θ_i , решаются уравнения движения.

3. Обновление угла стрельбы по формуле

$$\theta_i = a - \left(\frac{X_{ц}}{X_k} \right) * (\theta_{i-1} - a).\tag{4}$$

4. Проверка сходимости:

Если $|X_{ц} - X_k| < 1$ м, то завершить итерации, иначе повторить шаги 2–4.

3. База данных снарядов

Для расчета используются характеристики снарядов: масса, калибр, начальная скорость, баллистический коэффициент, моменты инерции, параметры вращения.

В качестве базы данных используются сведения из технической документации и экспериментальных измерений [2]. Таблица содержит разнообразные типы снарядов для различных артиллерийских систем.

Основные параметры осколочно-фугасных снарядов

№ снаряда	Орудие	Индекс снаряда	Калибр d , мм	Кэф. формы $i_{x43}(i_{x58})$	Масса m , кг	Баллист. коэф. C
1	САО 2С9 «Нона-С»	ОФ-843Б	120	0,92	16,0	0,828
2	Пушка Д - 30, САУ 2С1 «Гвоздика»	ОФ-56	122	1,10	21,76	0,752
3	Пушка М46	ОФ-482М	130	0,95	33,4	0,480
4	Пушка 2А36	ОФ-29	152	1,02	46,0	0,512
5	САУ 2С7 Пион	ОФ-43	203	1,0	110,0	0,375

4. Построение таблиц стрельбы

Структура таблицы стрельбы представлена на рис. 2. Для каждой дальности указывается [3]:

- Дальность (м);
- угол стрельбы (градусы);
- поправки по направлению Z на деривацию (градусы);
- поправки по направлению ΔZ_w на боковой ветер 10 м/с (градусы);
- поправки по дальности ΔX_w на продольный ветер 10 м/с (м);
- поправки по дальности ΔX_p на изменение давления на 10 мм рт. ст. (м);
- поправки по дальности ΔX_T на изменение температуры на 10°C (м);
- поправки по дальности ΔX_{v0} на изменение начальной скорости на 1 % (м).

	Дальность (X, м)	Угол стрельбы (θ, град.)	Направление (Z, град)	Направление бок. ветер (ΔZ_w , град)	Встр. ветер (ΔX_w , м)	Давление (ΔX_p , м)	Температура (ΔX_T , м)	Нач. скорость (ΔX_{v0} , м)
▶	1000	0,35373	0,00061	0,03235	0,90473	-0,55436	2,78769	15,9266
	1200	0,45017	0,00061	0,04089	1,4645	-0,89507	4,50519	22,94793

Рис. 2. Структура таблицы стрельбы с поправками по направлению и дальности

Для заданного диапазона дальностей решается серия обратных задач, параметры заносятся в таблицу. Возможно построение таблиц в реальном времени.

5. Программная реализация и результаты решения задачи

Для практического применения разработанного алгоритма был создан специализированный программный модуль в среде C#, который обеспечивает полный цикл решения обратных задач внешней баллистики и формирования таблиц стрельбы. Программа предоставляет пользователю интуитивно понятный интерфейс для выбора типа снаряда из базы данных, включающей такие

параметры, как масса, калибр, начальная скорость и баллистические коэффициенты, что согласуется с методиками, описанными в [6]. В качестве примера использовался осколочно-фугасный снаряд ОФ-29, калибр 152 мм, масса 46 кг (см. таблицу). После выбора снаряда пользователь может задать координаты цели, а также учесть текущие метеорологические условия, такие как скорость и направление ветра, атмосферное давление и температуру.

На основе введенных данных модуль решает обратную задачу баллистики, определяя оптимальные углы стрельбы и поправки для поражения цели. Результаты расчетов автоматически формируются в виде таблицы стрельбы (рис. 3), содержащей ключевые параметры: дальность, угол прицеливания, поправки на ветер, давление и другие внешние факторы.

Внешняя баллистика		Таблица стрельбы						
	Дальность (X, м)	Угол стрельбы (θ, град.)	Направление (Z)	Направление (ΔZw)	ΔXw'	ΔXp	ΔXT	ΔXv0
▶	1000	0,35373	0,00061	0,03235	0,90473	-0,55436	2,78769	15,9266
	1200	0,45017	0,00061	0,04089	1,4645	-0,89507	4,50519	22,94793
	1400	0,5192	0,00061	0,04578	2,15217	-1,31332	6,61615	31,29363
	1600	0,57098	0,00061	0,05066	2,96718	-1,80872	9,11954	40,96685
	1800	0,61999	0,00061	0,05432	2,90697	-1,75498	8,84245	28,63231
	2000	0,71842	0,00061	0,06042	3,84022	-2,31209	11,65981	35,33124
	2200	0,79909	0,00183	0,06653	4,89763	-2,9428	14,85306	42,76016
	2400	0,8663	0,00183	0,07141	6,07782	-3,64623	18,41866	50,91175
	2600	0,92668	0,00183	0,07507	6,21387	-3,69389	18,65077	41,77879
	2800	1,02597	0,00183	0,08118	7,55062	-4,47675	22,6231	48,4155
	3000	1,11207	0,00183	0,08606	9,011	-5,33127	26,96412	55,5531
	3200	1,18744	0,00183	0,09094	10,5955	-6,25773	31,67592	63,19504
	3400	1,26429	0,00183	0,0946	10,91539	-6,38714	32,31928	55,05638
	3600	1,36471	0,00183	0,10071	12,6773	-7,39948	37,4739	61,67349
	3800	1,45456	0,00305	0,10559	14,56429	-8,48278	42,99615	68,67353
	4000	1,53543	0,00305	0,10925	16,5766	-9,63714	48,88742	76,058
	4200	1,63177	0,00305	0,11414	17,11251	-9,85403	49,97336	68,41332
	4400	1,73342	0,00305	0,11902	19,31826	-11,09751	56,32741	75,01937
	4600	1,82626	0,00305	0,12268	21,65164	-12,41185	63,05129	81,93725
	4800	1,91764	0,00305	0,12756	22,36615	-12,70459	64,52193	75,48827
	5000	2,02914	0,00305	0,13123	24,90288	-14,10902	71,71621	81,82212
	5200	2,13217	0,00427	0,13611	27,57144	-15,58517	79,2866	88,42306
	5400	2,22751	0,00427	0,13977	30,36776	-17,13075	85,62249	87,18305
	5600	2,34517	0,00427	0,14465	31,37129	-17,52732	89,22508	88,91206
	5800	2,457	0,00427	0,14832	34,38642	-19,16538	97,64743	95,28012
	6000	2,56143	0,00427	0,15198	37,535	-20,87455	106,44554	98,86267
	6200	2,68375	0,00427	0,15686	38,77051	-21,35773	108,89377	96,19137
	6400	2,80359	0,00549	0,16052	42,15119	-23,1618	118,19426	102,39603

Рис. 3. Таблица стрельбы для снаряда ОФ-29

Проведенный анализ данных таблицы стрельбы позволяет сделать ряд важных наблюдений о характере влияния различных факторов на траекторию снаряда. Рассмотрим основные закономерности, выявленные в ходе исследования.

С увеличением дальности стрельбы наблюдается закономерный рост угла возвышения, необходимого для поражения цели. Эта зависимость носит нелинейный характер. Интегральный эффект воздействия ветра нарастает по мере увеличения времени полета снаряда.

Атмосферные факторы оказывают разнонаправленное влияние. Повышение температуры на 10 °С приводит к увеличению дальности (положительные значения ΔX_T), что связано с уменьшением плотности воздуха. Напротив, рост давления на 10 мм рт. ст. сокращает дальность (отрицательные значения ΔX_p) из-за увеличения сопротивления среды. Особенно важно отметить значительное влияние начальной скорости – ее изменение всего на 1 % вызывает поправки в дальности на 308 м на дальности 26,4 км.

Практическое применение полученных результатов требует особого внимания к следующим аспектам. Во-первых, при стрельбе на большие дистанции необходимо особенно тщательно учитывать метеорологические условия и начальную скорость снаряда. Во-вторых, системы управления огнем должны использовать сложные нелинейные модели коррекции. В-третьих, таблицы стрельбы нуждаются в регулярной актуализации с учетом конкретных условий применения.

Заключение

Предложенный алгоритм позволяет эффективно решать обратные задачи внешней баллистики и формировать таблицы стрельбы для различных условий. Использование базы данных снарядов и численных методов обеспечивает высокую оперативность и точность расчета. Система может быть расширена для работы в реальном времени и интеграции в системы автоматизированного управления огнем.

Список литературы

1. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 75. – С. 122–137.
2. *Королев, С. А.* Развитие подходов к решению проблем аэродинамики и устойчивости движения снарядов и неуправляемых ракет на основе математического моделирования : дис. ... д-ра техн. наук. – Ижевск, 2020.
3. *Дмитриевский, А. А.* Внешняя баллистика / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко, С. С. Богодистов. – Москва : Машиностроение, 1991. – 320 с.
4. *Шахнович, И. М.* Основы внешней баллистики. – Москва : Воениздат, 1983. – 368 с.
5. *Борисенко, А. Д.* О некоторых приближенных методах решения обратной задачи внешней баллистики / А. Д. Борисенко, Н. Д. Борисенко, В. Б. Маничев // Инженерный вестник. – 2015. – № 7.
6. *Борисенко, А. Д.* Прикладные методы вычисления траекторий снарядов и ракет / А. Д. Борисенко, В. Б. Маничев. – Санкт-Петербург : Политехника, 2010. – 290 с.

Применение генетического алгоритма для решения задачи оптимального управления движением планирующего снаряда

Д. А. Трефилов, С. А. Королев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Целью работы является исследование возможности повышения дальности полета планирующего снаряда за счет применения методов оптимального управления движением. В работе предложена математическая модель планирующего полета управляемого реактивного снаряда переменной массы, описывающая изменение координат, скорости, угла наклона траектории, угла атаки и угла скольжения. Для построения функции оптимального управления движением снаряда реализован генетический алгоритм с вещественным кодированием для переменного угла атаки.

Ключевые слова: внешняя баллистика, планирующий полет, повышение дальности, математическое моделирование, оптимальное управление, генетический алгоритм.

Введение

В настоящее время оптимизация дальности полета летательного аппарата является актуальной задачей в инженерном направлении. В работе [1] автор описывает несколько подходов для решения задачи оптимального управления: методы динамического программирования, прямые и косвенные методы. Одним из методов оптимизации является генетический алгоритм [2, 3]. В работе [4] автор описывает применение генетического алгоритма для создания программы угла тангажа при выведении ракеты-носителя на заданную орбиту. В другой работе [5] генетический алгоритм используется для построения траектории движения летательного аппарата с учетом рельефа местности.

Математическая модель внешней баллистики планирующего снаряда

Система дифференциальных уравнений движения управляемого реактивного снаряда имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy_c}{dt} = V \sin \theta, \quad \frac{dz_c}{dt} = -V \cos \theta \sin \psi \\ m \frac{dV}{dt} &= -mg \sin \theta + P - X_a, \quad mV \frac{d\theta}{dt} = -mg \cos \theta + Y_a + P \sin \alpha \\ mV \cos \theta \frac{d\psi}{dt} &= Z_a + P \sin \beta, \quad \frac{dm}{dt} = -q_p(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где x_c – дальность полета; y_c – высота полета снаряда; z_c – боковое отклонение; θ – угол наклона траектории; ψ – угол направления; V – скорость снаряда;

да; m – масса снаряда; g – ускорение силы тяжести; P – тяга реактивного двигателя; $q_p(t)$ – расход топлива; α, β – углы атаки и скольжения снаряда.

Проекции аэродинамической силы на оси траекторной системы координат $Ox_k y_k z_k$

$$X_a = C_x \frac{\rho V^2}{2} S_M, \quad Y_a = C_y \frac{\rho V^2}{2} S_M, \quad Z_a = C_z \frac{\rho V^2}{2} S_M, \quad (2)$$

где $C_x = C_x(M, \alpha, \beta)$, $C_y = C_y(M, \alpha)$, $C_z = C_z(M, \beta)$ – зависимости безразмерных коэффициентов проекций аэродинамической силы.

Зависимости для коэффициентов проекций аэродинамической силы:

$$\begin{aligned} C_x(M, \alpha, \beta) &= C_{x0}(M) [1 + a_x(\alpha^2 + \beta^2)], \\ C_y(M, \alpha) &= C_y^\alpha(M) \alpha, \quad C_z(M, \beta) = C_z^\beta(M) \beta \end{aligned} \quad (3)$$

где $C_{x0}(M)$ – зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Маха при $\alpha = \beta = 0$; $C_y^\alpha(M)$, $C_z^\beta(M)$ – производные коэффициентов подъемной и боковой силы по углам α и β соответственно.

Схема управляемого реактивного снаряда представлена на рис. 1. Форма крыльев и стабилизаторов снаряда приводится к трапецевидной форме с размерами: l – длина крыла; b_0 – корневая хорда; b_1 – концевая хорда; h_k – ширина; l_k – длина; χ_0 – угол стреловидности передней кромки крыла; $\chi_0 = \arctan\left(\frac{b_0 - b_1}{l}\right)$. Удлинение крыла $\lambda = \frac{4l}{(b_0 + b_1)}$, сужение $\eta = \frac{b_1}{b_0}$. Рули занимают часть площади стабилизаторов $S_p = k_p S_c$, где k_p – доля площади рулей в стабилизаторах; S_c – площадь стабилизаторов.

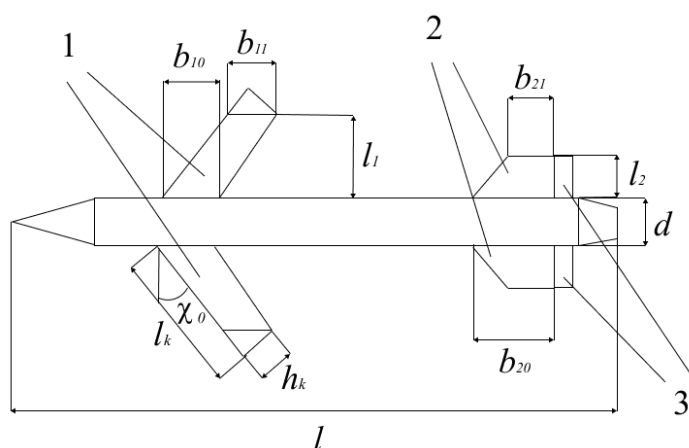


Рис. 1. Схема управляемого реактивного снаряда:
1 – крылья; 2 – стабилизаторы; 3 – рули

Крылья снаряда являются раздвижными и имеют момент раскрытия в определенное время полета. При раскрытии крыльев появляются дополнительные

подъемная сила и сила сопротивления, выражающиеся следующими коэффициентами:

$$C_y^{\text{кр}}(t) = \begin{cases} C_y^{\text{кр}}(M, \alpha), & t \geq t_{\text{кр}} \\ 0, & t < t_{\text{кр}} \end{cases}, \quad C_x^{\text{кр}}(t) = \begin{cases} C_x^{\text{кр}}(M, \alpha), & t \geq t_{\text{кр}} \\ 0, & t < t_{\text{кр}} \end{cases}, \quad (4)$$

где $t_{\text{кр}}$ – время раскрытия крыльев.

Зависимости коэффициентов аэродинамической силы и момента снаряда вычисляются по методике, приведенной в работах [7, 8].

Управление движением снаряда происходит за счет углов отклонения рулей. Зависимость между углами отклонения рулей и углами скольжения и атаки

$$\beta = \frac{m_y^{\delta_n}}{m_y^{\beta}} \delta_n, \quad \alpha = \frac{m_z^{\delta_b}}{m_z^{\alpha}} \delta_b. \quad (5)$$

Углы отклонения рулей изменяются по следующим условиям $|\delta_n| < \delta_n^{\text{max}}$, $|\delta_b| < \delta_b^{\text{max}}$. При этом углы атаки и скольжения для устойчивого движения снаряда по траектории не превышают следующих значений

$$\alpha < 20^\circ, \quad \beta < 20^\circ. \quad (6)$$

Рассматривается следующий способ управления движением снаряда.

Способ управления движением снаряда предполагает задание угла атаки в виде зависимости от времени $\alpha = \alpha(t)$ на участке управления, когда угол наклона траектории станет отрицательным $\theta < 0$. Угол атаки до участка управления $\alpha = 0$. Функцию $\alpha = \alpha(t)$ найдем из решения задачи оптимального управления с целью повышения дальности полета снаряда. Задачу будем решать с помощью генетического алгоритма, поэтому непрерывную зависимость $\alpha = \alpha(t)$ заменим вектором значений угла атаки в фиксированные моменты времени $\bar{\alpha} = \{\alpha_i\}$, $i = 0, \dots, k$.

Для решения системы (1) был использован метод Рунге – Кутты 4-го порядка [9, 10]. Для обеспечения заданной относительной точности по норме вектора решений $\varepsilon = 10^{-3}$, шаг по времени составил 0,03125 с.

Алгоритм решения задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$X = f(\bar{\alpha}) \rightarrow \max, \quad (7)$$

где $\bar{\alpha} = \{\alpha_i\}$ – вектор углов атаки; $\alpha_i \in [-20, 20]$; $i = 1, \dots, k$; $k = \frac{T}{h}$; T – время полета снаряда; h – интервал времени изменения угла атаки.

При решении задачи оптимизации был использован генетический алгоритм с вещественным кодированием. Для наискорейшей сходимости были выбраны следующие параметры генетического алгоритма: объем популяции, равный 50 хромосом, вероятность скрещивания, равная 0,5, вероятность мутации, равная 0,01. Кроме того, был выбран лучший способ скрещивания.

Рассмотрим способ скрещивания двух зависимостей $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, обеспечивающий непрерывность в точке стыковки графиков.

На рис. 2 представлены графики двух зависимостей $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, выбранных для скрещивания.

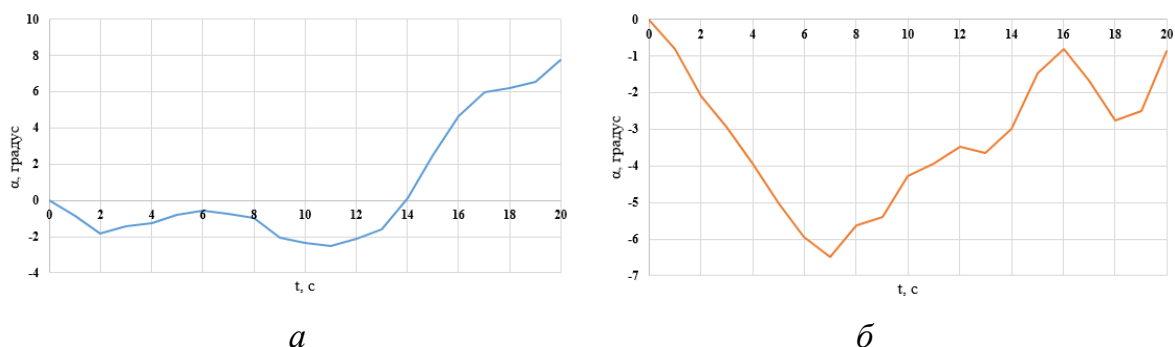


Рис. 2. Графики зависимостей $\alpha_1(t)$ (а) и $\alpha_2(t)$ (б), выбранных для скрещивания

Предлагается способ стыковки зависимостей в точке скрещивания, основанный на масштабировании двух участков зависимости $\alpha_{12}(t)$. Результат стыковки зависимостей представлен на рис. 3.

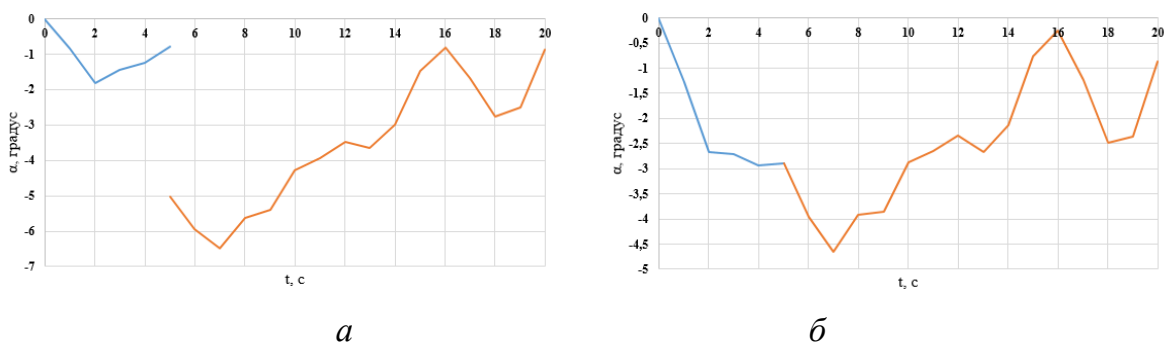


Рис. 3. Результат стыковки зависимостей $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ после скрещивания: а – без масштабирования; б – с масштабированием

Формулы алгоритма стыковки двух зависимостей $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, обеспечивающий непрерывность в точке стыковки:

$$\alpha_{12}(t) = \begin{cases} \bar{\alpha}_1(t), & t \in [t_0, t_1] \\ \bar{\alpha}_2(t), & t \in [t_1, t_k] \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}_1(t) = \alpha_1(t_1) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \frac{\Delta\alpha}{2}, \quad \bar{\alpha}_2(t) = \alpha_2(t_1) - \frac{t_k - t}{t_k - t_1} \frac{\Delta\alpha}{2}, \quad (8)$$

$$\Delta\alpha = \alpha_2(t_1) - \alpha_1(t_1),$$

где t_0 – начало участка управления; t_1 – момент времени скрещивания зависимостей; t_k – конец участка управления.

При генерации случайных значений векторов управления в генетическом алгоритме могут наблюдаться нефизичные изменения функции управления.

Для сглаживания решений, полученных с помощью генетического алгоритма, применялась аппроксимация полиномом 3-й степени. На рис. 4 представлены сглаженные графики угла атаки.

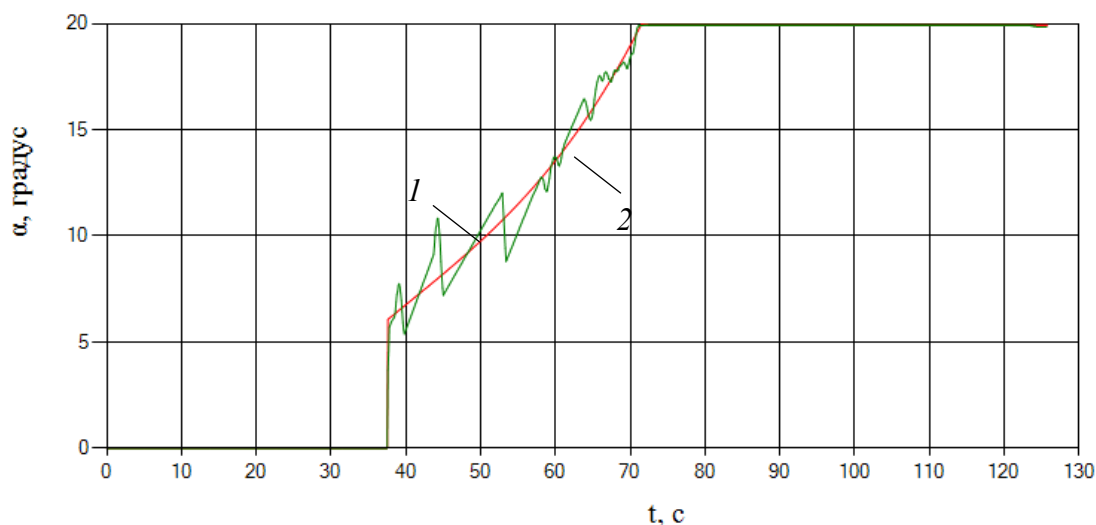


Рис. 4. Графики угла атаки: 1 – зависимость для угла атаки, полученная с помощью генетического алгоритма; 2 – аппроксимирующая функция полиномом 3-й степени

Результаты решения задачи оптимального управления

Рассмотрим полет планирующего реактивного снаряда. В качестве базовой конструкции рассматривался реактивный снаряд калибра 122 мм. В конструкции моделируемого планирующего снаряда предусмотрено наличие крыльев, раскрываемых на траектории, и два реактивных двигателя, первый – стартовый, включается в начале траектории ($t_{p0} = 0$), второй – разгонный, включается на траектории в оптимальный момент времени t_{p1} .

Рассмотрим результаты моделирования траекторий снаряда для 4 случаев: 1 – опорная траектория (штатный реактивный снаряд 122 мм, без управления), 2 – траектория снаряда без второго реактивного двигателя с оптимальным управлением на участке планирования, 3 – траектория снаряда со вторым реактивным двигателем без участка планирования, 4 – траектория снаряда со вторым реактивным двигателем и оптимальным управлением на участке планирования. На рис. 5 представлены графики траекторий для рассматриваемых случаев.

Максимальная дальность полета штатного 122-мм реактивного снаряда составляет 20,6 км (случай 1). За счет оптимального управления на участке планирования дальность повышается на 4,3 км (21 %) (случай 2). За счет включения второго реактивного двигателя в оптимальной точке траектории дальность повышается на 11,0 км (53 %) (случай 3). В случае включения второго реактивного двигателя и оптимального управления на участке планирования дальность повышается на 17,5 км (86 %) (случай 4).

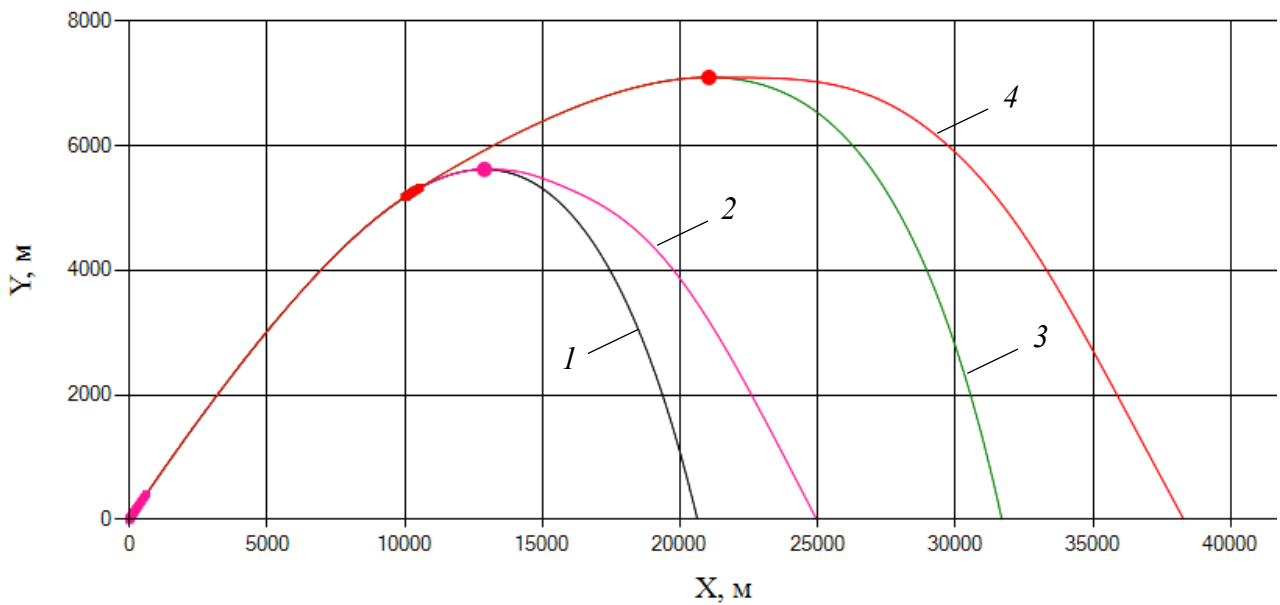


Рис. 5. Графики траекторий движения полета снаряда: 1 – опорная траектория (без управления), 2 – траектория с оптимальным управлением на участке планирования, 3 – траектория со вторым реактивным двигателем, 4 – траектория со вторым реактивным двигателем и оптимальным управлением на участке планирования

На рис. 6 представлены траектории при различных способах управления: 1 – управление с оптимальным постоянным углом наклона траектории $\theta = -5^\circ$, 2 – управление с оптимальным постоянным углом атаки $\alpha = 20^\circ$, 3 – оптимальное управление с переменным углом атаки, найденное с помощью генетического алгоритма [11].

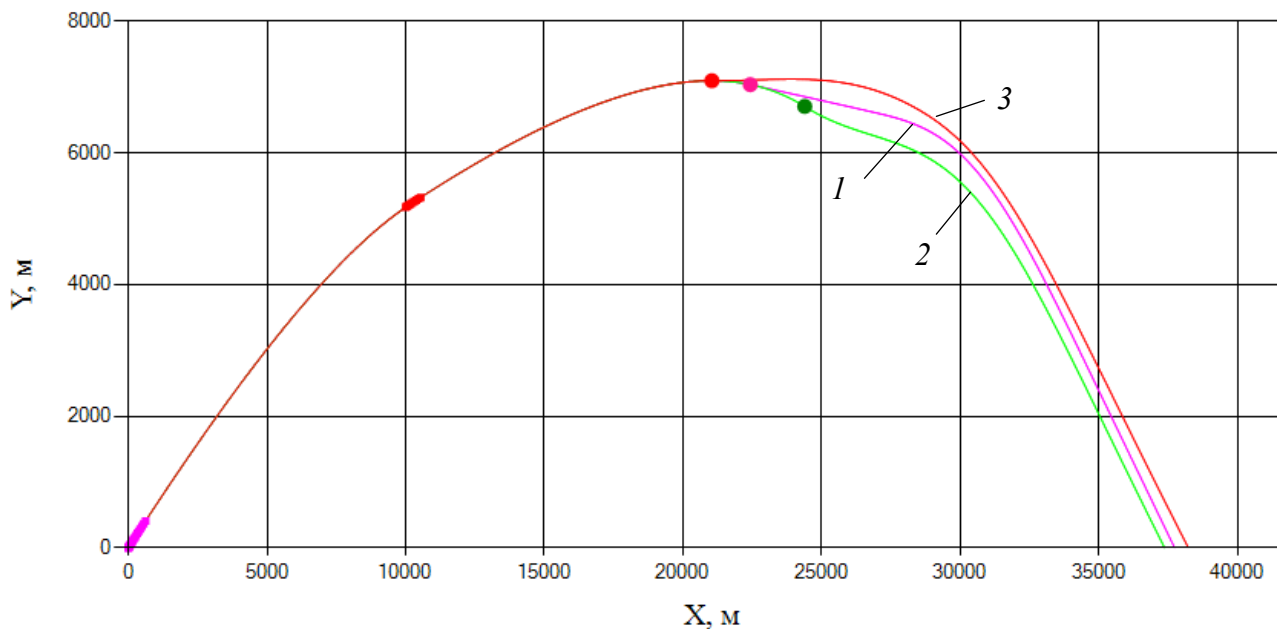


Рис. 6. Графики траекторий движения полета снаряда: 1 – управление с оптимальным постоянным углом наклона траектории $\theta = -5^\circ$, 2 – управление с оптимальным постоянным углом атаки $\alpha = 20^\circ$, 3 – оптимальное управление с переменным углом атаки

На рис. 7 представлены графики углов атак при различных способах управления.

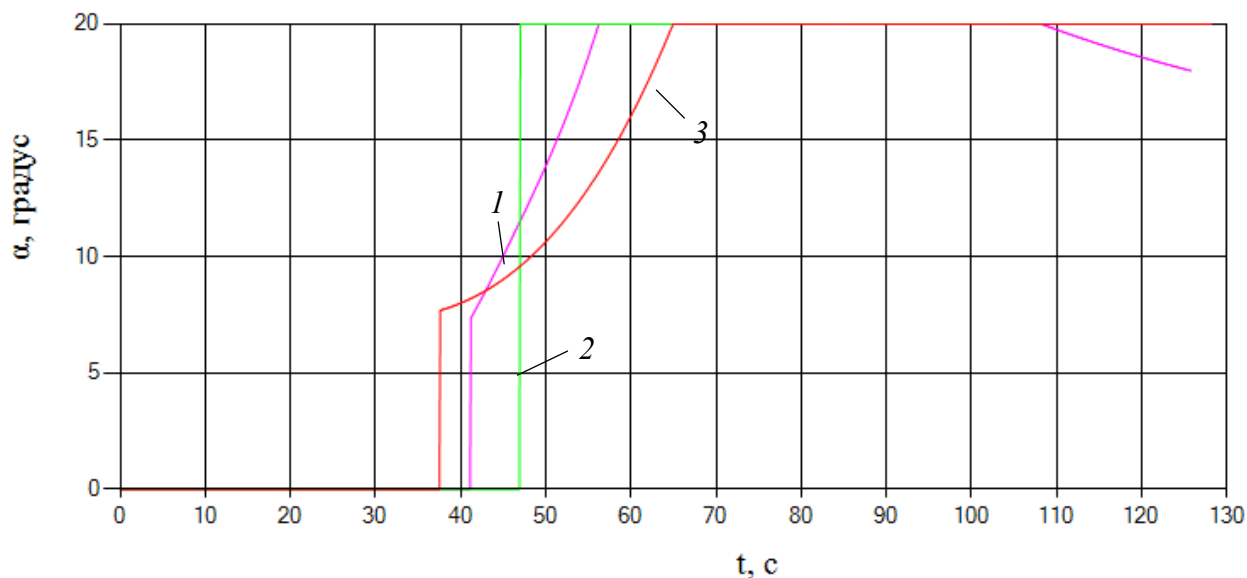


Рис. 7. Графики углов атак: 1 – управление с оптимальным постоянным углом наклона траектории $\theta = -5^\circ$, 2 – управление с оптимальным постоянным углом атаки $\alpha = 20^\circ$, 3 – оптимальное управление с переменным углом атаки

Заключение

В ходе работы была приведена математическая постановка задачи оптимального управления движением планирующего снаряда с целью повышения дальности полета, разработан генетический алгоритм для решения задачи оптимального управления, выявлены оптимальные параметры генетического алгоритма. Кроме того, удалось получить оптимальную зависимость для угла атаки с помощью генетического алгоритма и построить траекторию полета с полученной зависимостью для угла атаки.

Список литературы

1. Нечепуренко, К. Ю. Методы оптимизации дальности полета летательного аппарата // Исследования молодых ученых: материалы XLII Междунар. науч. конф. (г. Казань, июль 2022 г.). – Казань : Молодой ученый, 2022. С. 11-19.
2. Панченко, Т. В. Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие. – Астрахань : Астраханский университет, 2007. – 87 с.
3. Гладков, Л. А. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – 2-е изд., исправл. и доп. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 368 с.
4. Тедеев, Г. И. Применение генетического алгоритма для формирования программы тангажа в задаче выведения ракеты-носителя / Г. И. Тедеев, А. Б. Жукова, А. Л. Масленников // Авиакосмическое приборостроение. – 2021. – № 12. – С. 19–27.
5. Акиншин, Н. С. Применение генетического алгоритма для получения модели траектории летательного аппарата / Н. С. Акиншин, О. В. Есиков, Д. О. Агафонов // Известия ТулГУ. – 2021. – № 9. – С. 19–24.

6. Математические модели динамики движения летательных аппаратов: учеб. пособие / Т. Ю. Лемешонок, А. А. Сизова, Н. Е. Баранов, В. А. Санников; Балт. гос. техн. ун-т. – Санкт-Петербург, 2020. – 122 с.

7. Внешняя баллистика: Учебник для студентов вузов / А. А. Дмитриевский, Л. Н. Лысенко, Н. А. Леонтьева. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 2005. – 608 с.

8. *Лебедев, А. А.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учебное пособие для вузов / А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин. – 2-е изд., перераб. И доп. – Москва : Машиностроение, 1973. – 616 с.

9. *Горелов, Ю. Н.* Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутты) : учеб. пособие / Ю. Н. Горелов, Л. В. Курганская. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2023. – 76 с.

10. *Самарский, А. А.* Численные методы : учеб. пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.

11. *Трефилов, Д. А.* Разработка программного обеспечения для моделирования и оптимального управления движением планирующего снаряда / Д. А. Трефилов, С. А. Королев // III Липановские научные чтения : материалы региональной школы-семинара молодых ученых, аспирантов и студентов. – 2024. – С. 59–67.

Решение основной задачи внутренней баллистики выстрела для зерненого пороха в одномерной газодинамической постановке

Е. А. Федорычев

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Статья посвящена численному решению основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) для зерненого пороха в одномерной газодинамической постановке. Разработана математическая модель, включающая уравнения газовой динамики, горения пороха и движения снаряда. Для решения системы уравнений применен совместный эйлерово-лагранжев (СЭЛ) метод, позволяющий эффективно моделировать процессы в ствольных системах. Представлены алгоритмы расчета для различных конфигураций ствола, снаряда и порохового заряда. Проведена численная реализация метода, а также верификация результатов на ключевых режимах – при максимальном давлении и вылете снаряда из ствола. Полученные данные демонстрируют работоспособность предложенного подхода для моделирования внутренней баллистики.

Ключевые слова: внутренняя баллистика, зерненный порох, газовая динамика, численное моделирование, метод СЭЛ.

Введение

В настоящее время существует два основных подхода к изучению внутрибаллистических процессов, протекающих в стволе артиллерийского орудия: термодинамический и газодинамический [1].

Термодинамический метод имеет существенные недостатки [2]. При этом не учитываются многие факторы, влияющие на процессы горения пороха: теплотери, форма зарядной камеры, процессы перемещения пороховых зерен вдоль камеры и т. п. В этой связи получил развитие газодинамический метод решения основной задачи внутренней баллистики.

Представлена математическая модель, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии для решения задачи внутренней баллистики выстрела для зерненого пороха в одномерной газодинамической постановке, которая описывает движение газов, твердой фазы и снаряда внутри ствола. Система записана в дивергентной форме, чтобы использовать разностный совместный эйлерово-лагранжев (СЭЛ) метод [3], который позволяет рассчитывать течения с ударными волнами или разрывами параметров в области течения.

На основе газодинамической модели было разработано программное обеспечение, позволяющее произвести расчеты и выводить графики основных параметров газовой динамики. Также предусмотрена возможность выводить эпюру максимальных давлений, действующих на камеру и ствол. Проведены исследования сходимости с помощью метода Рунге [4].

Математическая постановка задачи

Уравнение сохранения массы внутри объема Σ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho m S}{\partial t} dx = - \int_{\Sigma} \rho m v_n d\sigma + \int_{x_1}^{x_2} G S dx, \quad (1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \delta(1-m) S}{\partial t} dx = - \int_{\Sigma} \delta(1-m) w_n d\sigma - \int_{x_1}^{x_2} G S dx.$$

Уравнение импульсов каждой из фаз можно представить в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho m \vec{v} S}{\partial t} dx = - \int_{\Sigma} \rho m \vec{v} v_n d\sigma - \int_{\Sigma} p m \vec{n} d\sigma - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{B3} S dx + \int_{x_1}^{x_2} G \vec{w} S dx, \quad (2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \delta(1-m) \vec{v} S}{\partial t} dx = - \int_{\Sigma} \delta(1-m) \vec{w} w_n d\sigma - \int_{\Sigma} p(1-m) \vec{n} d\sigma + \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{B3} S dx - \int_{x_1}^{x_2} G \vec{w} S dx.$$

Полная энергия смеси в объеме Σ изменяется за счет притока энергии извне, работы сил давления на ограничивающей поверхность Σ , притока химической энергии за счет горения пороховых зерен. За счет этого получаем следующее уравнение:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho m S \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \delta(1-m) S \left(c_k T_H + \frac{w^2}{2} \right)}{\partial t} dx =$$

$$= - \int_{\Sigma} \left[\rho m \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) v_n + \delta(1-m) \left(c_k T_H + \frac{w^2}{2} \right) w_n \right] d\sigma - \quad (3)$$

$$- \int_{\Sigma} p (m v_n + (1-m) w_n) d\sigma + \int_{x_1}^{x_2} G (Q - c_k T_H) S dx,$$

где ρ – плотность газа; m – пористость смеси; S – площадь сечения; G – газоприход в единице объема; v – скорость движения газа; δ – плотность материала пороха; w – скорость движения твердой фазы; p – давление; τ_w – гидравлическое сопротивление; ε – внутренняя энергия единицы массы пороховых газов; Q – теплотворная способность пороха.

Система уравнений, приведенная к удобному виду для численного решения [1, 3]:

$$M_k^{n+1/2} = M_k^{n-1/2} - \tau \left\{ [\nabla M v]_k^{n-1/2} + \frac{m_{k-1/2}^n S_{k-1/2} + m_{k+1/2}^n S_{k+1/2}}{2} \left(\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x} \right)_k^n - (H_1)_k^n \right\},$$

$$v_k^{n+1/2} = \frac{2M_k^{n+1/2}}{r_{k-1/2}^n + r_{k+1/2}^n},$$

$$\begin{aligned}
M_k^{n+1/2} &= M_k^{n-1/2} - \tau \left\{ [\nabla M w]_k^{n-1/2} + \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - m_{k-1/2}^n) S_{k-1/2} + (1 - m_{k+1/2}^n) S_{k+1/2}}{2} \left(\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x} \right)_k^n - (H_2)_k^n \right\}, \\
w_k^{n+1/2} &= \frac{2M_k^{n+1/2}}{\delta \left\{ (1 - m_{k-1/2}^n) S_{k-1/2}^n + (1 - m_{k+1/2}^n) S_{k+1/2}^n \right\}}, \\
r_{k-1/2}^{n+1} &= r_{k-1/2}^n - \tau \left\{ [\nabla r v]_{k-1/2}^{n+1/2} - (H_3)_{k-1/2}^{n+1/2} \right\}, \\
e_{k-1/2}^{n+1} &= e_{k-1/2}^n - \tau \left\{ [\nabla e v]_{k-1/2}^{n+1/2} + (p_{k-1/2}^{n+1/2} + q_{k-1/2}^{n+1/2}) \left([\nabla m S v]_{k-1/2}^{n+1/2} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. [\nabla (1 - m) S w]_{k-1/2}^{n+1/2} \right) - (H_4)_{k-1/2}^{n+1/2} \right\}, \\
z_{k-1/2}^{n+1} &= z_{k-1/2}^n - \tau \left\{ [\nabla z w]_{k-1/2}^{n+1/2} - z_{k-1/2}^{n+1/2} [\nabla w]_{k-1/2}^{n+1/2} - (H_5)_{k-1/2}^{n+1/2} \right\}, \\
a_{k-1/2}^{n+1} &= a_{k-1/2}^n - \tau \frac{[\nabla a S w]_{k-1/2}^{n+1/2}}{S_{k-1/2}}, \\
p_{k-1/2}^{n+1} &= \frac{\theta e_{k-1/2}^{n+1}}{m_{k-1/2}^{n+1} S_{k-1} - \alpha r_{k-1/2}^{n+1}}, \\
m_{k-1/2}^{n+1} &= 1 - a_{k-1/2}^{n+1} \Lambda_0 \left(1 - \Psi(z_{k-1/2}^{n+1}) \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Начальные и граничные условия:

1. $0 \leq x \leq L_{\text{км}}, t = 0$:

$$\begin{aligned}
v = w = 0, \quad p_{\text{н}} = p_{\text{в}} &= \frac{0,3\omega_{\text{в}} f}{W_{\text{км}} - \frac{\omega}{\delta} - \alpha\omega_{\text{в}}}, \quad \rho_{\text{н}} = \frac{p_{\text{в}}}{\alpha p_{\text{в}} + f}, \\
\varepsilon_{\text{н}} &= \frac{f}{\theta}, \quad z_{\text{н}} = 0, \quad m_{\text{н}} = 1 - \frac{\Delta}{\delta}, \quad a_{\text{н}} = \frac{\omega}{\Lambda_0 \delta W_{\text{км}}},
\end{aligned}$$

где $p_{\text{в}}$ – давление воспламенителя; $\omega_{\text{в}}$ – масса воспламенителя; f – сила пороха; Δ – плотность заряжения; $L_{\text{км}}$ – длина зарядной камеры; $W_{\text{км}}$ – объем зарядной камеры; Λ_0 – начальный объем порохового зерна.

2. $x = 0, t \geq 0$

$$v = w = 0;$$

3. $x = x_{\text{сн}}, t \geq 0$

$$v = w = v_{\text{сн}}, \quad q \frac{dv_{\text{сн}}}{dt} = S_{\text{сн}} p_{\text{сн}},$$

где $v_{\text{сн}}$ – скорость снаряда; q – масса снаряда.

Результаты исследования сходимости разностного решения системы показаны на рис. 1, 2.

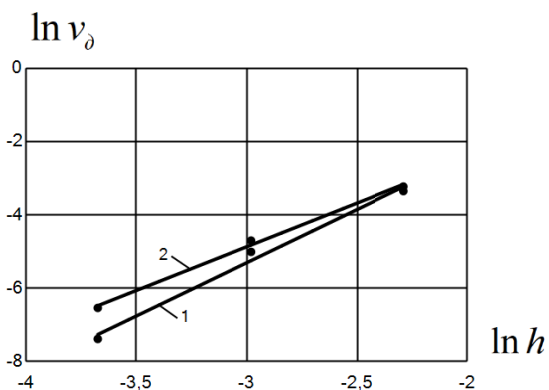


Рис. 1. Погрешность вычислений по дульной скорости: 1 – $\omega/q = 0,4$; 2 – $\omega/q = 2,0$

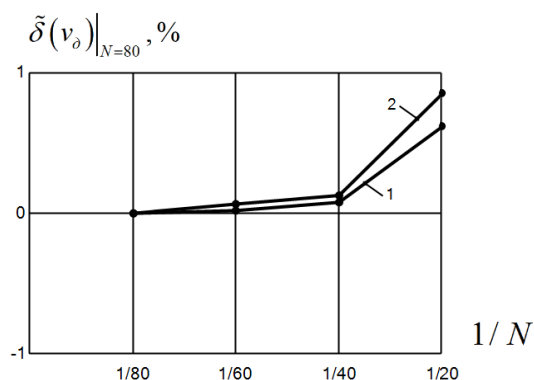


Рис. 2. Сходимость разностного решения по дульной скорости: 1 – $\omega/q = 0,4$; 2 – $\omega/q = 2,0$

Дульная скорость и практический порядок сходимости для первого варианта равны 965 м/с и 2,67 соответственно, а для второго варианта – 1799 м/с и 2,44 соответственно.

Результаты решения основной задачи внутренней баллистики показаны на рис. 3–15.

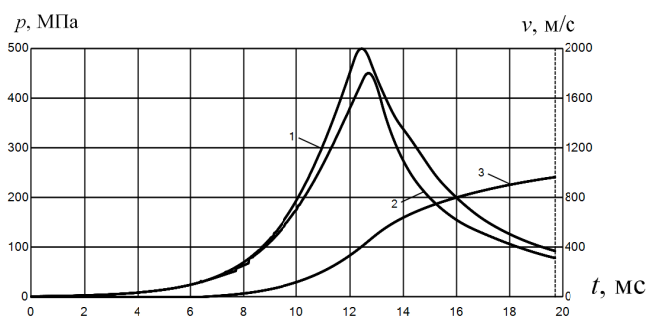


Рис. 3. Зависимость давлений на дно канала (1), дно снаряда (2) и скорости снаряда (3) от времени для $\omega/q = 0,4$

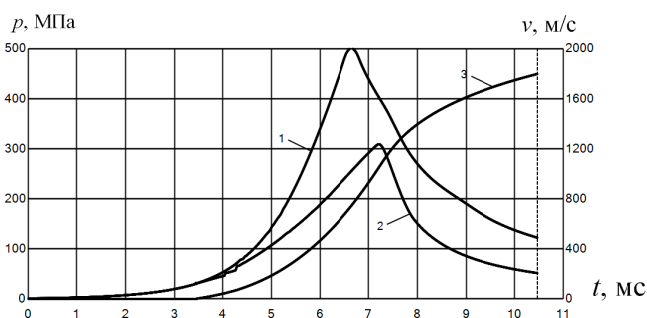


Рис. 4. Зависимость давлений на дно канала (1), дно снаряда (2) и скорости снаряда (3) от времени для $\omega/q = 2,0$

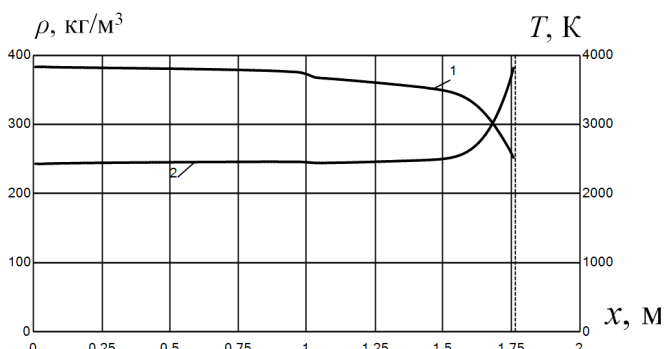


Рис. 5. Распределение плотности (1) и температуры (2) пороховых газов по длине ствола для $\omega/q = 0,4$

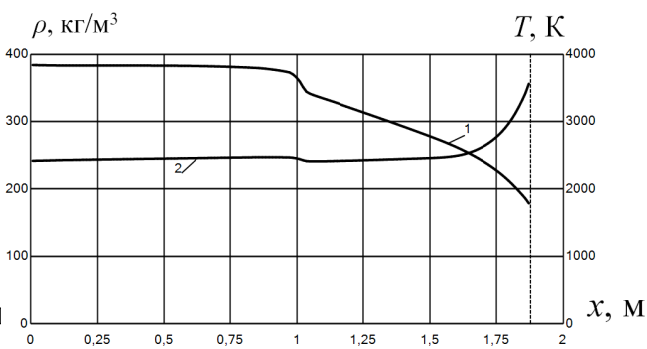


Рис. 6. Распределение плотности (1) и температуры (2) пороховых газов по длине ствола для $\omega/q = 2,0$

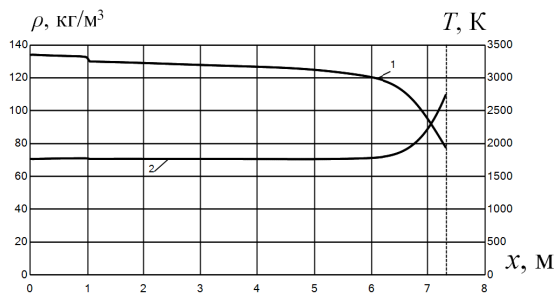


Рис. 7. Распределение плотности (1) и температуры (2) пороховых газов по длине ствола для $\omega/q = 0,4$

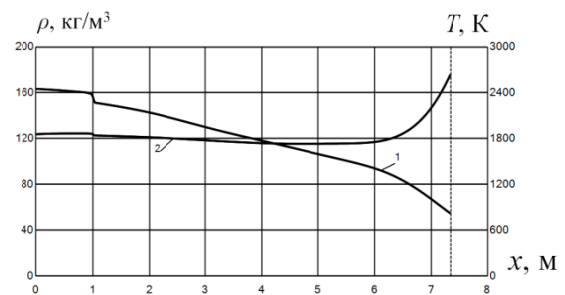


Рис. 8. Распределение плотности (1) и температуры (2) пороховых газов по длине ствола для $\omega/q = 2,0$

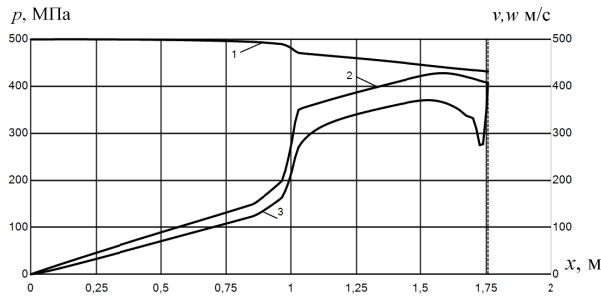


Рис. 9. Распределение давления (1), скорости газов (2) и скорости твердой фазы (3) по длине ствола для $\omega/q = 0,4$

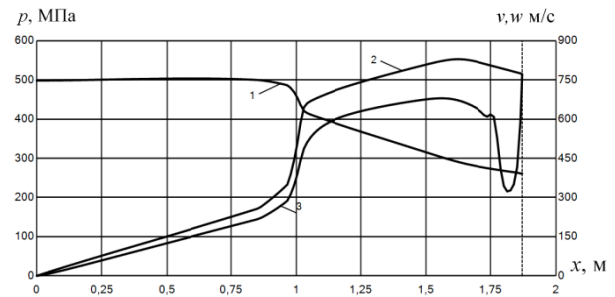


Рис. 10. Распределение давления (1), скорости газов (2) и скорости твердой фазы (3) по длине ствола для $\omega/q = 2,0$

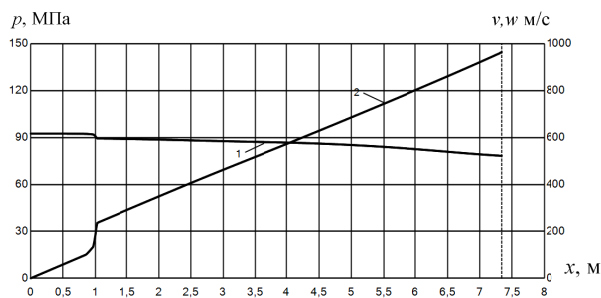


Рис. 11. Распределение давления (1) и скорости газов (2) по длине ствола для $\omega/q = 0,4$

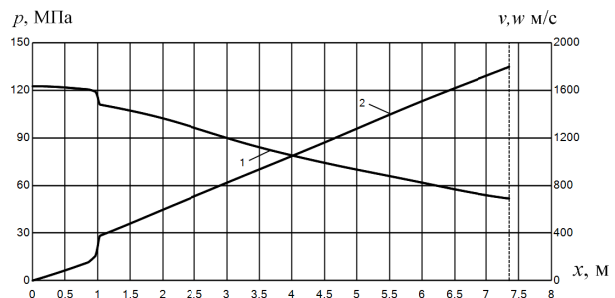


Рис. 12. Распределение давления (1) и скорости газов (2) по длине ствола для $\omega/q = 2,0$

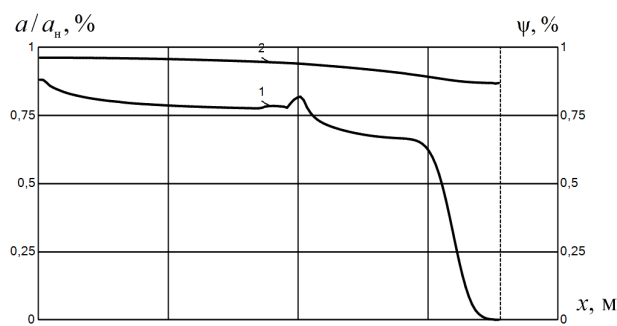


Рис. 13. Распределение относительной счетной концентрации пороховых элементов (1) и относительной доли сгоревшего пороха (2) по длине ствола для $\omega/q = 0,4$

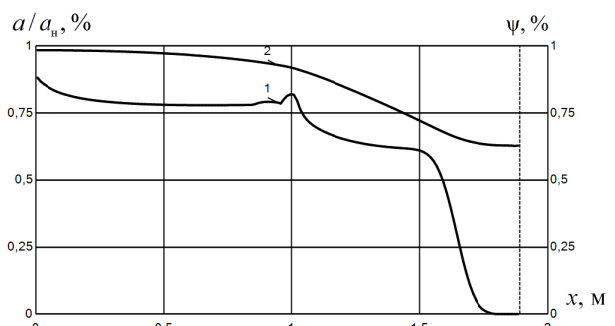


Рис. 14. Распределение относительной счетной концентрации пороховых элементов (1) и относительной доли сгоревшего пороха (2) по длине ствола для $\omega/q = 2,0$

Заметим, что относительная счетная концентрация пороховых элементов у границы снаряда близка к нулю в связи с этим на рис. 13, 14 на этом участке наблюдается падение скорости твердой фазы.

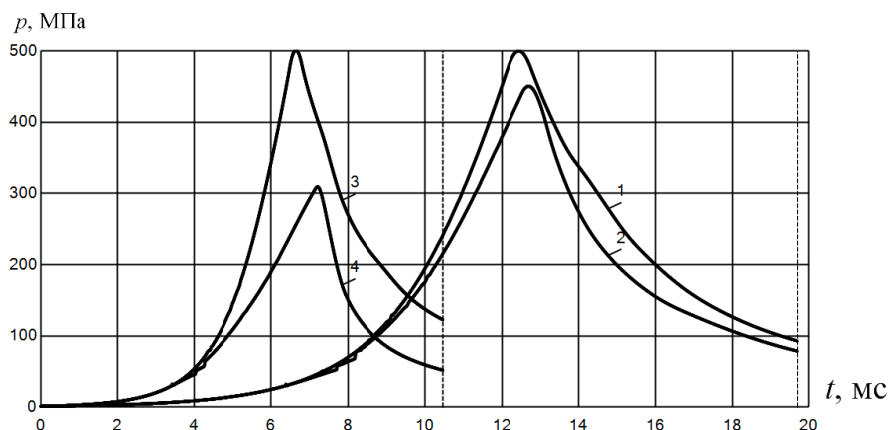


Рис. 15. Зависимости давления на дно канала (1) и на дно снаряда (2) для $\omega/q = 0,4$ и зависимости давления на дно канала (3) и на дно снаряда (4) для $\omega/q = 2,0$ от времени

Для расчета прочности канала ствола используется эпюра максимальных давлений, реализующаяся при выстреле. Эпюры максимальных давлений для рассматриваемых случаев представлены на рис. 16. Интересно отметить, что распределение максимальных давлений для $\omega/q = 0,4$ лежит выше, чем график давления для $\omega/q = 2,0$, что говорит о том, что нагрузка, которую испытывает ствол, в первом случае выше, чем во втором.

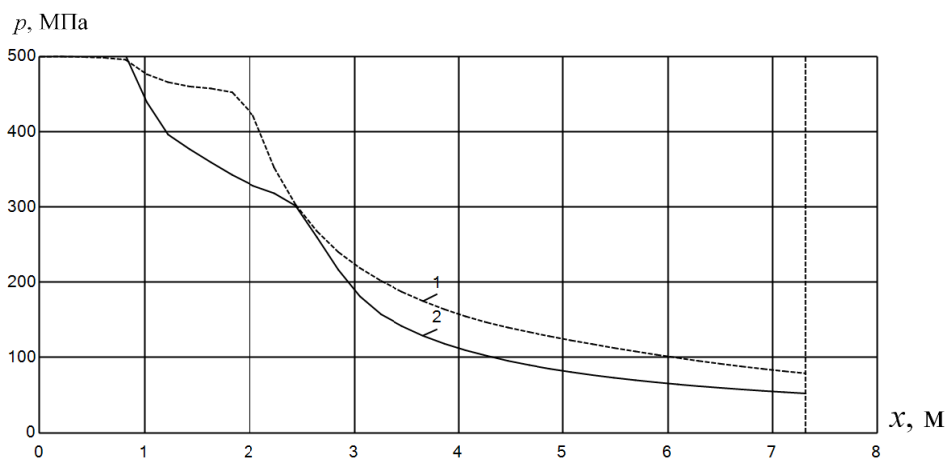


Рис. 16. Распределение давления (1) для $\omega/q = 0,4$ и распределение давления (2) для $\omega/q = 2,0$ по длине ствола

Заключение

1. Представлена физико-математическая модель основной задачи внутренней баллистики на основе одномерных нестационарных уравнений механики гетерогенных реагирующих сред. Сформулированы начальные и граничные условия.

2. Разработан алгоритм численного решения задачи на основе конечно-разностного метода СЭЛ, который благодаря шахматным сеткам обладает вторым порядком точности по пространству и времени.

3. Проведена верификация численного метода и алгоритма по сеточной сходимости. Значение по дульной скорости отличается от «точного» не более чем на 0,8 %, а практический порядок аппроксимации равен 2,4–2,7, в зависимости от ω/q .

4. Сравнение эпюр максимальных давлений показывает, что при проектировании ствола для артиллерийских систем с различными ω/q необходимо ориентироваться на огибающую эпюр максимальных давлений, полученных при различных ω/q .

Список литературы

1. *Русяк, И. Г.* Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах / И. Г. Русяк, А. М. Липанов, В. М. Ушаков. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2016. – 456 с.

2. *Серебряков, М. Е.* Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. – Москва : Оборонгиз, 1962. – 704 с.

3. *Нох, В. Ф.* СЭЛ – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. – Москва : Мир, 1967. – С. 128–189.

4. *Вержбицкий, В. М.* Основы численных методов. – Москва : Высш. шк., 2002. – 840 с.

СЕКЦИЯ 3.
ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.927.2

**О структуре спектра некоторых многоточечных краевых задач
для уравнения второго порядка**

М. Ю. Ватолкин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Вопросы об описании структуры спектра (множества собственных значений) обобщенной задачи Валле Пуссена для квазидифференциального уравнения в терминах спектров подходящим образом выбранных вспомогательных классических задач Валле Пуссена и о представлении собственных функций обобщенной задачи с помощью собственных функций классических задач, насколько нам известно, ранее не рассматривались. Получена теорема, устанавливающая связь между спектром обобщенной задачи Валле Пуссена для квазидифференциального уравнения второго порядка и спектрами определенным образом введенных вспомогательных задач Валле Пуссена, найдено представление собственных функций обобщенной задачи с помощью собственных функций этих задач. Приведены примеры.

Ключевые слова: собственное значение (функция), обобщенная (классическая) задача Валле Пуссена, спектр, левый (правый) индекс точки, условия однозначной разрешимости, нуль кратности единица, дефект, равный единице, неосцилляция.

Введение

Обобщенной задачей Валле Пуссена (ОЗВП) второго порядка на собственные значения называется многоточечная линейная краевая задача для уравнения (2.1) (см. §2) с краевыми условиями вида (3.1), (3.2) (см. §3). В терминах квазидифференциальных уравнений изучались многоточечные линейные краевые задачи и их сопряженные в работах В. Я. Дерра [1]–[3], в [1] введен класс ОЗВП. По поводу определения ОЗВП для квазидифференциального уравнения произвольного порядка см. [1, с. 1863] (<https://www.mathnet.ru/rus/de/v23/i11/p1861>), также см. работу [3, с. 59] (<https://www.mathnet.ru/rus/vuu282>).

Класс ОЗВП замкнут относительно перехода к сопряженной задаче и, в частности, содержит классические задачи Валле Пуссена (КЗВП, ее определение см. там же) и их сопряженные, а также различные неклассические задачи

Валле Пуссена для обыкновенного дифференциального уравнения, рассматривавшиеся ранее Ю. В. Покорным в работах [4–6] (продолжением исследований Ю. В. Покорного являются его совместные с учениками работы [7–9]). Переход от обыкновенного дифференциального уравнения к квазидифференциальному и обобщение классического процесса построения сопряженных краевых условий позволяют построить задачу, сопряженную с исходной многоточечной краевой задачей, что и сделано в работах [1–3].

Квазидифференциальное уравнение является простым и эффективным обобщением обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n -го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д. Ю. Шина [10] и [11]. Неоднородное квазидифференциальное уравнение позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть «обобщёнными», «уравнениями с особенностями в коэффициентах» и т.п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряжённое в смысле Лагранжа уравнение представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения. Для квазидифференциального уравнения справедливы основные утверждения общей теории обыкновенного дифференциального уравнения (подробнее см. [1]–[3]). В последней из этих работ отражено современное состояние теории линейных многоточечных краевых задач и сопряжённых с ними. Имеется достаточно большое количество работ А. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, в которых рассматриваются и изучаются квазидифференциальные уравнения и различные краевые задачи для них. Обзор некоторых из этих работ, опубликованных в последние годы, а также сравнительно недавно, сделан во введении статьи [12]. Также квазидифференциальные уравнения достаточно широко используются во многих работах российских математиков (обзор некоторых из этих работ см. там же).

Монография [13] посвящена теории обобщенных квазидифференциальных уравнений. В [13] рассматриваются различные концепции построения квазипроизводных. По поводу конкретизации типа квазидифференциальных уравнений, рассматриваемых в настоящей статье, и их месте в общей концепции таких уравнений, а также об используемых здесь обозначениях квазипроизводных (они отличаются от более простых общепринятых обозначений) см. [13, с. 22]. Решения квазидифференциальных уравнений здесь ищутся в классе функций, имеющих локально абсолютно непрерывные квазипроизводные. Случай квазипроизводных, сингулярных обобщенных функций нами не рассматривается. Настоящая работа посвящена исследованию спектральных свойств одномерных квазидифференциальных операторов. В ней рассматривается многоточечная краевая задача (2.1), (3.1), (3.2) (ОЗВП), т. е. когда в некоторых точках отрезка решение должно иметь нуль определенной кратности, а в некоторых (возможно, тех же) – разрывы старших производных. Количество тех и других согласуется с порядком уравнения так, чтобы количество получающихся условий совпадало с размерностью пространства решений уравнения (учитывая упомя-

нутые выше разрывы старших производных). Вначале рассматривается случай обобщенных условий Валле Пуссена специального вида для квазидифференциального уравнения второго порядка. А именно, если нули и разрывы перемежаются, за исключением «средней» пары точек, в которых только нули, то спектр вспомогательной задачи (2.1)–(2.3) содержит спектр задачи, рассматриваемой на отрезке между этой парой точек. Чтобы полностью описать спектр вспомогательной задачи (2.1)–(2.3), необходимо дополнительно ввести в рассмотрение еще «начальную» и «конечную» краевые задачи вида (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8), тогда спектр вспомогательной задачи (2.1)–(2.3) является объединением спектров этих трех вышеупомянутых задач, т. е. дело обстоит примерно так, как это имеет место в случае дифференциальных уравнений, рассматриваемых на графах (пространственных сетях), см., например, работу Ю. В. Покорного и В. Л. Прядиева [14]. Спектр исходной задачи (2.1), (3.1), (3.2) является, в свою очередь, объединением спектров нескольких таких вспомогательных задач, рассматриваемых на подотрезках исходного отрезка.

2. Случай обобщенных условий Валле Пуссена специального вида для квазидифференциального уравнения второго порядка

Пусть I – открытый интервал в \mathbb{R} , $P = (p_{ik})_0^2$ – нижняя треугольная матрица размерности три на три, $p_{ik}(\cdot): I \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{22}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля в интервале I , а функции $\frac{1}{p_{11}(\cdot)}$, $\frac{p_{10}(\cdot)}{p_{11}(\cdot)}$, $\frac{p_{20}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$, $\frac{p_{21}(\cdot)}{p_{22}(\cdot)}$ локально суммируемы в I . Определим квазипроизводные ${}^0_p x(\cdot)$, ${}^1_p x(\cdot)$, ${}^2_p x(\cdot)$ функции $x(\cdot): I \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами (см. [1]–[3], заметим, что в этих работах определяются квазипроизводные произвольного порядка):

$${}^0_p x(t) = p_{00}(t)x(t), \quad {}^1_p x(t) = p_{11}(t) \frac{d({}^0_p x(t))}{dt} + p_{10}(t)({}^0_p x(t)),$$

$${}^2_p x(t) = p_{22}(t) \frac{d({}^1_p x(t))}{dt} + p_{21}(t)({}^1_p x(t)) + p_{20}(t)({}^0_p x(t)).$$

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения следующего специального вида (если в краевых условиях (2.3) значение индекса i , находящееся левее, оказывается больше значения, которое находится правее, то тогда эти значения и значения индекса i , находящиеся между ними, игнорируем):

$$\prod_{i=1}^{\nu} \sigma(t - a_i)^{\mu_i} \sigma(t - a_i)^{\rho_i} {}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in J \doteq [a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b), \quad (2.1)$$

$${}^0_p x(a_0) = {}^0_p x(a_2) = \dots = {}^0_p x(a_{2\xi}) = {}^0_p x(a_{2\xi+1}) = \dots = {}^0_p x(a_{\nu-1}) = {}^0_p x(a_{\nu+1}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(a = a_0 < a_1 < \dots < a_\nu < a_{\nu+1} = b, \nu \geq 0, \nu - \text{чётное}, 0 \leq \xi \leq \frac{\nu}{2}, \xi - \text{фиксировано} \right),$$

$$\begin{aligned} \rho_i &\leq 1, & i=1, 3, \dots, 2\xi-1, 2\xi+2, \dots, \nu-2, \nu, \\ \rho_i &= 0, & i=2, 4, \dots, 2\xi, 2\xi+1, \dots, \nu-3, \nu-1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ${}^k_p x(\cdot)$ ($k=0, 1, 2$), как только что говорилось, означает квазипроизводную порядка k , построенную по нижней треугольной матрице $P = (p_{ik})_{i,k=0}^2$, ρ_i – дефект решения в точке a_i , $\rho_i = \delta$ ($0 \leq \delta \leq 2$), если ${}^{2-\delta}_p x(\cdot)$ имеет разрыв в точке a_i , а все квазипроизводные меньшего порядка непрерывны в этой точке, функция $\sigma(\cdot)$ совпадает с $\text{sign}(\cdot)$ в открытых интервалах (a_k, a_{k+1}) и односторонне непрерывна в точках a_k . Скажем, что функция $x(\cdot)$ имеет в точке $a_i \in J$ P -нуль кратности μ_i ($1 \leq \mu_i \leq 2$), если квазипроизводная ${}^{\mu_i}_p x(a_i) \neq 0$, а все квазипроизводные меньшего порядка обращаются в нуль в этой точке. Через $\varphi_P(x, a_i)$ обозначим кратность P -нуля функции $x(\cdot)$ в точке a_i . Однородное квазидифференциальное уравнение второго порядка

$${}^2_p x(t) = 0, \quad t \in J \quad (2.4)$$

называется неосцилляционным на J , если общее число P -нулей любого нетривиального решения уравнения (2.4) на J с учетом их кратностей не превосходит единицы (см. [1]). В работе [1] дается определение неосцилляции уравнения произвольного порядка.

Введем в рассмотрение также вспомогательные краевые задачи вида

$${}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in [a, a_1]), \quad (2.5)$$

$${}^0_p x(a) = {}^0_p x(a_1) = 0 \quad (2.6)$$

и
$${}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in [a_\nu, b]), \quad (2.7)$$

$${}^0_p x(a_\nu) = {}^0_p x(b) = 0 \quad (2.8)$$

(т. е. «начальную» и «конечную» простейшие краевые задачи, в краевых условиях которых заданы только нули нулевых квазипроизводных неизвестной функции $x(t)$).

Замечание 1. В силу специфики краевых условий (2.2), (2.3) (а именно, перемежаемость нулей и разрывов решения, за исключением «средней» пары точек) функция $\prod_{i=1}^{\nu} \sigma(t - a_i)^{\mu_i} \sigma(t - a_i)^{\rho_i}$ всегда будет принимать положительные значения на отрезке $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$, следовательно, в правой части уравнения (2.1) всегда будет присутствовать знак «минус» при значениях $t \in [a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$.

Замечание 2. В случае $\xi = 0$ задача (2.5), (2.6) совпадает с задачей (2.1)–(2.3) при значениях $t \in [a_{2\xi}, a_{2\xi+1}] = [a, a_1]$. В случае $\xi = \nu/2$ задача (2.7), (2.8) совпадает с задачей (2.1)–(2.3) при значениях $t \in [a_{2\xi}, a_{2\xi+1}] = [a_\nu, b]$.

Теорема 1. Пусть уравнение (2.4) неосцилляционно на J , известны собственные значения λ двухточечной КЗВП для уравнения (2.1), рассматриваемой на отрезке $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$ (или, что то же самое, в силу того, что рассматривается уравнение второго порядка, а не более высокого, известны собственные значения λ задачи Штурма – Лиувилля с краевыми условиями первого рода на концах отрезка $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$), и отвечающие им собственные функции $u_{2\xi, 2\xi+1}(t, \lambda)$. Тогда λ являются одновременно собственными значениями задачи (2.1)–(2.3). Пусть известны нетривиальные решения $u_{k, k+1}(t, \lambda)$ уравнения (2.1) на остальных отрезках $[a_k, a_{k+1}]$, обращающиеся в нуль на том конце отрезка, который участвует в условиях (2.2), тогда равенство

$${}_P^0 u(t, \lambda) = \begin{cases} {}_P^0 u_{01}(t, \lambda) & (a_0 \leq t \leq a_1), \\ \prod_{i=1}^{m-1} \frac{{}_P^{1-\rho_i} u_{i-1, i}(a_i, \lambda)}{{}_P^{1-\rho_i} u_{i, i+1}(a_i, \lambda)} {}_P^0 u_{m-1, m}(t, \lambda) & (a_{m-1} \leq t \leq a_m, m=2, 3, \dots, v+1) \end{cases} \quad (2.9)$$

определяет с точностью до постоянного множителя нулевую квазипроизводную собственной функции $u(t, \lambda)$ задачи (2.1)–(2.3), отвечающей собственному значению λ . Пусть известны собственные значения $\hat{\lambda}$ задачи (2.5), (2.6) и отвечающие им собственные функции $u_l(t, \hat{\lambda})$. Тогда $\hat{\lambda}$ является одновременно собственным значением задачи (2.1) – (2.3), а отвечающая ему с точностью до постоянного множителя нулевая квазипроизводная собственной функции задачи (2.1) – (2.3) имеет вид

$${}_P^0 u(t, \hat{\lambda}) = \begin{cases} {}_P^0 u_l(t, \hat{\lambda}) & (a \leq t \leq a_1), \\ 0 & (a_1 \leq t \leq b). \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть известны собственные значения $\tilde{\lambda}$ задачи (2.7), (2.8) и отвечающие им собственные функции $u_r(t, \tilde{\lambda})$. Тогда $\tilde{\lambda}$ является одновременно собственным значением задачи (2.1)–(2.3), а отвечающая ему с точностью до постоянного множителя нулевая квазипроизводная собственной функции задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$${}_P^0 u(t, \tilde{\lambda}) = \begin{cases} 0 & (a \leq t \leq a_v), \\ {}_P^0 u_r(t, \tilde{\lambda}) & (a_v \leq t \leq b). \end{cases} \quad (2.11)$$

Спектр ОЗВП (2.1) – (2.3) не может быть шире объединения спектра двухточечной КЗВП, рассматриваемой на отрезке $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$, и спектров двухточечных КЗВП вида (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8).

Замечание 3. Если собственное значение λ задачи (2.1)–(2.3) принадлежит либо спектру задачи (2.5), (2.6), либо спектру задачи (2.7), (2.8), либо спектру двухточечной КЗВП для уравнения (2.1), рассматриваемой на отрезке

$[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$, то тогда этому λ отвечает единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция $u(t, \lambda)$ задачи (2.1)–(2.3). В этом случае будем говорить, что кратность собственного значения λ задачи (2.1)–(2.3) равна единице. У собственных значений λ задачи (2.1)–(2.3) могут быть кратности, большие единицы, в зависимости от того, принадлежит ли это λ одновременно спектрам задач (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8), и спектру двухточечной КЗВП для уравнения (2.1), рассматриваемой на отрезке $[a_{2\xi}, a_{2\xi+1}]$ либо же это собственное значение λ принадлежит одновременно спектрам только любых двух из трех вышеперечисленных задач. Соответственно, для первого случая кратность λ будет равна трем, т. е. ему будут отвечать три линейно-независимые собственные функции. Для остальных случаев кратность собственного значения λ будет равна двум, т. е. ему будут отвечать две линейно-независимые собственные функции.

3. Случай обобщенных условий Валле Пуссена наиболее общего вида для казидифференциального уравнения второго порядка

Вместо краевых условий (2.2), (2.3) зададим для уравнения (2.1) другие обобщенные условия Валле Пуссена

$$\varphi_P(x, a_i) \geq \mu_i, \quad \text{где } \mu_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu), \quad \mu_0 = \mu_{\nu+1} = 1, \quad (3.1)$$

$$\rho_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu), \quad \sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = 2 + \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i. \quad (3.2)$$

Введем левые (l_k) и правые (r_k) индексы точек a_k ($k = 1, \dots, \nu$) (см. [1]):

$$l_k = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i - \sum_{i=0}^k \mu_i, \quad r_k = 2 + \sum_{i=k+1}^{\nu} \rho_i - \sum_{i=k}^{\nu+1} \mu_i \quad (k = 1, \dots, \nu) \quad (3.3)$$

(если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то полагаем сумму равной нулю). В работе [1] изучается ОЗВП произвольного порядка и формулы для нахождения индексов точек отличаются первым слагаемым от формул (3.3) (число 2 нужно заменить на n).

Следуя [1], назовем условиями **ОР** (однозначной разрешимости) следующие неравенства: $l_k \geq 0, r_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, \nu$). В случае краевых условий вида (2.2), (2.3) для уравнения (2.1) левые и правые индексы точек a_k ($k = 1, \dots, \nu$), как в этом несложно убедиться, неотрицательны и условия ОР всегда выполнены, а также в этом случае всегда выполняется второе из краевых условий (3.2):

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = 2 + \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i.$$

Краевые условия (2.2), (2.3) есть частный случай краевых условий (3.1), (3.2). Краевые условия (3.1), (3.2) позволяют одновременно задавать во внутренних точках отрезка J и нуль кратности единица, и дефект, равный единице. Пусть $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_p}$ – все такие точки. В краевых условиях (2.2), (2.3)

одновременность задания в одной и той же внутренней точке отрезка J нуля кратности единица, и дефекта, равного единице, невозможна.

Замечание 4. В дальнейшем предполагаем, что любому собственному значению λ задачи вида (2.1)–(2.3) отвечает единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция, т. е. кратность любого собственного значения λ задачи (2.1)–(2.3) равна единице.

Теорема 2. Пусть уравнение (2.4) неосцилляционно на J и выполнены условия ОР. Тогда имеют место следующие утверждения:

а) Спектр ОЗВП (2.1), (3.1), (3.2) представляет собой объединение спектров $(p+1)$ -ой ОЗВП вида (2.1)–(2.3), рассматриваемых на отрезках

$$\left[a_0, a_{k_1} \right], \left[a_{k_1}, a_{k_2} \right], \dots, \left[a_{k_p}, a_{v+1} \right],$$

или, что то же самое в силу теоремы 1, объединение спектров $(p+1)$ -й задачи вида (2.1)–(2.3).

б) Если собственное значение λ задачи (2.1), (3.1), (3.2) входит в спектр только одной ОЗВП вида (2.1) – (2.3), то ему отвечает единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция, если же λ одновременно входит в спектры N ($1 < N \leq p+1$) ОЗВП вида (2.1)–(2.3), то этому собственному значению отвечает $2^N - 1$ линейно-независимых собственных функций. Любая собственная функция ОЗВП (2.1), (3.1), (3.2), отвечающая собственному значению λ , равна нулю на тех отрезках из J , на которых заданы ОЗВП вида (2.1)–(2.3) и в спектры которых λ не входит, а на остальных отрезках из J , в спектры которых λ входит, совпадает с соответствующими собственными функциями ОЗВП вида (2.1)–(2.3) или, возможно, равна нулю, но не равна нулю на всех таких отрезках сразу.

Теорема 2 позволяет свести решение ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2) к решению нескольких ОЗВП вида (2.1)–(2.3).

Список литературы

1. Дерр, В. Я. К обобщённой задаче Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, вып. 11. – С. 1861–1872.
2. Дерр, В. Я. О применении квазидифференциальных уравнений в теории линейных многоточечных краевых задач : дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. – Свердловск, 1990. – 335 с.
3. Дерр, В. Я. Об адекватном описании сопряжённого оператора // Вестник Удмуртского университета. Матем. Механика. Комп. науки. – 2011. – Вып. 3. – С. 43–63.
4. Покорный, Ю. В. О спектре интерполяционной краевой задачи // УМН. – 1977. – Т. 32, вып. 6. – С. 263–264.
5. Покорный, Ю. В. О неклассической задаче Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, вып. 6. – С. 1018–1027.

6. *Покорный, Ю. В.* О переопределенной задаче Валле Пуссена // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, вып. 4. – С. 761.
7. *Покорный, Ю. В.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач / Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, вып. 4. – С. 658–670.
8. *Покорный, Ю. В.* Об осцилляционности спектра задач на некомпактном интервале / Ю. В. Покорный, А. В. Боровских // Проблемы современной теории периодических движений. – 1988. – Вып. 9. – С. 21–30.
9. *Покорный, Ю. В.* Системы Чебышева-Хаара в теории разрывных ядер Келлога / Ю. В. Покорный, А. В. Боровских // УМН. – 1994. – Т. 49, вып. 3. – С. 3–42.
10. *Шин, Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n -го порядка // Матем. сб. – 1940. – Т. 49, вып. 3. – С. 479–532.
11. *Шин, Д. Ю.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сб. – 1943. – Т. 55, вып. 1. – С. 39–70.
12. *Ватолкин, М. Ю.* О спектре одной квазидифференциальной краевой задачи второго порядка // Известия вузов. Математика. – 2023. – Вып. 1. С. 3–24.
13. Обобщенные квазидифференциальные уравнения / Р. М. Таций, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, Власий О.О. – Львов : ЛГУ БЖД, 2017. – 303 с.
14. *Покорный, Ю. В.* Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // УМН. – 2004. – Т. 59, вып. 3. – С. 115–150.

Примеры на исследование структуры спектра некоторых многоточечных краевых задач для уравнения второго порядка

М. Ю. Ватолкин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Настоящая статья является продолжением исследований автора, начатых в работе [1]. Здесь рассмотрены различные примеры на исследование структуры спектра многоточечных краевых задач для обыкновенного и квазидифференциального уравнений второго порядка и даны комментарии к примерам.

Ключевые слова: собственное значение (функция), левый (правый) индекс точки, условия однозначной разрешимости, нуль кратности единица, дефект равный единице, простейшая задача Штурма – Лиувилля, индефинитная задача Штурма – Лиувилля.

Заметим, что задача Валле Пуссена весьма интересна с практической точки зрения, а именно, классическая задача Валле Пуссена (КЗВП) имеет прямое отношение к теории интерполирования, а обобщенная задача Валле Пуссена (ОЗВП) – к теории сплайна (см. [2]). Другой пример, приводящий к «переопределенной» многоточечной краевой задаче, дает теория многоопорных балок (см. [3 и 4]): прогиб $y(x)$ балки, простирающейся вдоль отрезка $[a, b]$, связан с интенсивностью (функцией) $f(x)$ распределенной нагрузки равенством $(EIy'')'' = f(x)$, причем в точках a, b обязательно есть по два условия (условия закрепления концов балки), а промежуточные шарнирные опоры влекут дополнительные условия типа $y(a_k) = 0$. Некоторые элементарные свойства таких задач косвенным образом следуют из теории сплайна. Для многоопорной балки в монографии [5] установлены осцилляционные свойства функции влияния, которая определена исходя из физических соображений.

Рассмотрим примеры, они преследуют цель: проиллюстрировать случаи, когда теорема 2 (см. работу [1]) применима и когда не применима.

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_3)x''(t) = -\lambda x(t) \quad (t \in J),$$

$$x(a_0) = x(a_1) = x(a_2) = x(a_4) = 0 \quad (a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = b),$$

$$\rho_1 = \rho_3 = 1, \quad 4 = 2 + 2 \quad (\text{проверка второго из условий (3.2) (см. [1])}).$$

В этом примере левый индекс точки a_1 равен $2 + 0 - 2 = 0$, правый индекс точки a_1 равен $2 + 1 - 3 = 0$, левый индекс точки a_2 равен $2 + 1 - 3 = 0$,

правый индекс той же точки равен $2+1-2=1$, левый индекс точки a_3 равен $2+1-3=0$, правый индекс равен $2+0-1=1$ (см. формулы (3.3) из работы [1]). Отрицательных индексов нет, следовательно, выполнены условия ОР (см. [1]). Теорема 2 здесь применима. Исходная задача вида (2.1), (3.1), (3.2) (см. [1]) распадается на две задачи: первая из них является двухточечной КЗВП на отрезке $[a, a_1]$ (или, что то же самое, в силу того, что рассматривается уравнение второго порядка, задачей Штурма – Лиувилля с краевыми условиями первого рода, т. е. условиями Дирихле, на концах отрезка $[a, a_1]$); вторая задача есть ОЗВП вида (2.1) – (2.3) (см. [1]) на отрезке $[a_1, b]$.

Здесь собственные значения двухточечной КЗВП есть

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{a_1 - a} \right)^2 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а собственные значения ОЗВП вида (2.1) – (2.3), рассматриваемой на отрезке $[a_1, b]$, согласно теореме 1 (см. [1]), есть

$$\lambda_m = \left(\frac{\pi m}{a_2 - a_1} \right)^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad \text{и} \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b - a_3} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Спектр исходной ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2), согласно теореме 2, представляет собой объединение всех собственных значений λ_k, λ_m и λ_n . Если ни одна из дробей $\frac{a_2 - a_1}{a_1 - a}, \frac{a_1 - a}{a_2 - a_1}, \frac{b - a_3}{a_1 - a}, \frac{a_1 - a}{b - a_3}$ не является натуральным числом, то тогда ни одно из λ_k не совпадает ни с одним из λ_m , и ни одно из λ_k не совпадает ни с одним из λ_n .

Собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k , имеет вид

$$u(t, \lambda_k) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_k}(t - a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ 0 & (a_1 \leq t \leq b). \end{cases}$$

Собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_m , является функция $u(t, \lambda_m) = 0$ ($a \leq t \leq a_1$),

$$u(t, \lambda_m) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_m}(t - a_1)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \\ \cos(\sqrt{\lambda_m}(a_2 - a_1)) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_m}(t - a_2)) & (a_2 \leq t \leq a_3), \\ \cos(\sqrt{\lambda_m}(a_2 - a_1)) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_m}(a_3 - a_2))}{\sin(\sqrt{\lambda_m}(a_3 - b))} \times \\ \times \sin(\sqrt{\lambda_m}(t - b)) & (a_3 \leq t \leq b). \end{cases}$$

Собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n , имеет вид

$$u(t, \lambda_n) = \begin{cases} 0 & (a \leq t \leq a_3), \\ \sin(\sqrt{\lambda_n}(t-b)) & (a_3 \leq t \leq b). \end{cases}$$

Пусть ни одна из дробей $\frac{b-a_3}{a_2-a_1}$ и $\frac{a_2-a_1}{b-a_3}$, не является натуральным чис-

лом (см. замечание 4 в работе [1]). Если $a_2 - a_1 = a_1 - a$, то тогда собственные значения λ_k и λ_m попарно совпадают и любому λ_k , кроме двух собственных функций, записанных выше, будет отвечать еще одна собственная функция (третья по счету), а именно

$$u(t, \lambda_k) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-a_1)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \\ \cos(\sqrt{\lambda_k}(a_2-a_1)) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k}(t-a_2)) & (a_2 \leq t \leq a_3), \\ \cos(\sqrt{\lambda_k}(a_2-a_1)) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_k}(a_3-a_2))}{\sin(\sqrt{\lambda_k}(a_3-b))} \times \\ \times \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-b)) & (a_3 \leq t \leq b). \end{cases}$$

Если $b - a_3 = a_1 - a$, то тогда собственные значения λ_k и λ_n попарно совпадают и любому λ_k , кроме двух собственных функций, записанных выше, будет отвечать еще одна собственная функция (также третья по счету)

$$u(t, \lambda_k) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ 0 & (a_1 \leq t \leq a_3), \\ \sin(\sqrt{\lambda_k}(t-b)) & (a_3 \leq t \leq b). \end{cases}$$

Если или $\frac{a_2-a_1}{a_1-a} = l$, или $\frac{a_1-a}{a_2-a_1} = l$, где $l \in \mathbb{N}$ и $l \geq 2$, то тогда получим,

что или $\lambda_{m=lk} = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$), или $\lambda_{k=lm} = \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$), и тогда ситуация с тремя собственными функциями, отвечающими одному и тому же собственному значению, повторится. Если или $\frac{b-a_3}{a_1-a} = l$, или $\frac{a_1-a}{b-a_3} = l$, где $l \in \mathbb{N}$ и $l \geq 2$, то тогда получим, что или $\lambda_{n=lk} = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$), или $\lambda_{k=ln} = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$), и тогда ситуация с тремя собственными функциями,

отвечающими одному и тому же собственному значению, также повторится. Рассмотрим еще пример к теореме 2.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_3) {}^0_P x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_P x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_P x(a_0) = {}^0_P x(a_1) = {}^0_P x(a_2) = {}^0_P x(a_3) = {}^0_P x(a_4) = 0,$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1, \quad 5 = 2 + 3 \quad (\text{проверка второго из условий (3.2) (см. [1])})$$

Левый индекс точки a_1 : $2 + 0 - 2 = 0$, правый — $2 + 2 - 4 = 0$. Левый индекс точки a_2 : $2 + 1 - 3 = 0$, правый — $2 + 1 - 3 = 0$. Левый индекс точки a_3 : $2 + 2 - 4 = 0$, правый — $2 + 0 - 2 = 0$. Условия ОР выполнены. Теорема 2 применима. Исходная задача распадается на четыре двухточечных КЗВП (или — на четыре простейших задачи Штурма – Лиувилля с краевыми условиями первого рода), рассматриваемых на отрезках $[a, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], [a_3, b]$. Ее спектр есть объединение спектров этих задач. Если снова считать, что матрица P является единичной матрицей третьего порядка, то тогда в примере 2 несложно построить собственные функции и проверить выполнение утверждений теоремы 2.

Рассмотрим примеры 3 и 4, в которых не выполняется второе из краевых условий (3.2), и примеры 6 и 7, в которых не выполнены условия ОР, т. е. рассмотрим те случаи, когда теорема 2 неприменима.

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)x''(t) = -\lambda x(t) \quad (t \in J),$$

$$x(a_0) = x(a_2) = x(a_3) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1.$$

Второе из краевых условий (3.2): $\sum_{i=0}^3 \mu_i = 2 + \sum_{i=1}^2 \rho_i$ в примере 3 нарушается,

так как $3 \neq 2 + 2$. Теорема 2 поэтому неприменима и задача, которая рассматривается в примере 3, не является ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2). Исходная задача является прямой суммой простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля, рассматриваемой на отрезке $[a, a_2]$, и простейшей задачи Штурма – Лиувилля, рассматриваемой на отрезке $[a_2, b]$, где $a = a_0, b = a_3$. Найдем собственные значения и собственные функции этих задач. Собственные значения простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля есть

$$\lambda_k = -\left(\frac{\pi k}{a_1 - a}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \lambda_r = -\left(\frac{\pi r}{a_2 - a}\right)^2 \quad (r = 1, 2, \dots)$$

$$\text{и } \lambda_l = \left(\frac{\pi l}{a_2 - a_1}\right)^2 \quad (l = 1, 2, \dots), \quad \lambda_s = \left(\frac{\pi s}{a_2 - a}\right)^2 \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Собственными значениями простейшей задачи Штурма – Лиувилля являются $\lambda_m = \left(\frac{\pi m}{b - a_2}\right)^2$ ($m = 1, 2, \dots$). Спектр исходной задачи представляет собой объединение всех собственных значений $\lambda_k, \lambda_l, \lambda_r, \lambda_s$ и λ_m . Собственные функции простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля, отвечающие собственным значениям λ_k и λ_l , имеют вид

$$u(t, \lambda_k) = \begin{cases} \sin(\sqrt{-\lambda_k}(t - a_1)) & (a \leq t \leq a_1), \\ 0 & (a_1 \leq t \leq a_2); \end{cases}$$

$$u(t, \lambda_l) = \begin{cases} 0 & (a \leq t \leq a_1), \\ \sin(\sqrt{\lambda_l}(t - a_2)) & (a_1 \leq t \leq a_2). \end{cases}$$

Собственные функции простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля, отвечающие собственным значениям λ_r и λ_s , имеют вид

$$u(t, \lambda_r) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_r}(t - a_2))}{\sin(\sqrt{-\lambda_r}(a_1 - a_2))} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda_r}(a_1 - a_2)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda_r}(a_1 - a_2)) & (a_1 \leq t \leq a_2); \end{cases}$$

$$u(t, \lambda_s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a))}{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a))} \sin(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a)) & (a_1 \leq t \leq a_2). \end{cases}$$

Собственной функцией простейшей задачи Штурма – Лиувилля, отвечающей собственному значению λ_m , является функция

$$u(t, \lambda_m) = \sin(\sqrt{\lambda_m}(t - b)) \quad (a_2 \leq t \leq b).$$

Если ни одна из дробей $\frac{a_1 - a}{a_2 - a}, \frac{a_2 - a}{a_1 - a}, \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a}, \frac{a_2 - a}{a_2 - a_1}, \frac{a_2 - a_1}{b - a_2}, \frac{b - a_2}{a_2 - a_1}$,

$\frac{a_2 - a}{b - a_2}, \frac{b - a_2}{a_2 - a}$ не является натуральным числом, то тогда ни одно из собственных значений λ_k не совпадает ни с одним из собственных значений λ_r , ни одно из собственных значений λ_l не совпадает ни с одним из собственных значений λ_s , ни одно из λ_l не совпадает ни с одним из собственных значений λ_m , ни одно из λ_s не совпадает ни с одним из λ_m .

Собственные функции исходной задачи, отвечающие собственным значениям λ_k и λ_r , имеют вид

$$u(t, \lambda_k) = \begin{cases} \sin(\sqrt{-\lambda_k}(t - a_1)) & (a \leq t \leq a_1), \\ 0 & (a_1 \leq t \leq b); \end{cases} \quad (1)$$

$$u(t, \lambda_r) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{-\lambda_r}(t - a_2))}{\sin(\sqrt{-\lambda_r}(a_1 - a_2))} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda_r}(a_1 - a_2)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda_r}(t - a_2)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \end{cases} \quad (2)$$

$$u(t, \lambda_r) = 0 \quad (a_2 \leq t \leq b).$$

Собственные функции исходной задачи, отвечающие собственным значениям λ_l и λ_s имеют вид

$$u(t, \lambda_l) = \begin{cases} 0 & (a \leq t \leq a_1) \text{ или } (a_2 \leq t \leq b), \\ \sin(\sqrt{\lambda_l}(t - a_2)) & (a_1 \leq t \leq a_2); \end{cases} \quad (3)$$

$$u(t, \lambda_s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a))}{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a))} \sin(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \end{cases} \quad (4)$$

$$u(t, \lambda_s) = 0 \quad (a_2 \leq t \leq b).$$

Собственной функцией исходной задачи, отвечающей собственному значению λ_m , является функция

$$u(t, \lambda_m) = 0 \quad (a \leq t \leq a_2) \text{ и } u(t, \lambda_m) = \sin(\sqrt{\lambda_m}(t - b)) \quad (a_2 \leq t \leq b). \quad (5)$$

Если $a_2 - a_1 = b - a_2$, то тогда собственные значения λ_l и λ_m попарно совпадают и любому λ_l будут отвечать три собственные функции. Две из них определяются формулами (3) и (5), а третья имеет вид $u(t, \lambda_l) = 0 \quad (a \leq t \leq a_1)$,

$$u(t, \lambda_l) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_l}(t - a_2)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \\ \sin(\sqrt{\lambda_l}(t - b)) & (a_2 \leq t \leq b). \end{cases} \quad (6)$$

Если или $\frac{a_2 - a_1}{b - a_2} = j$, или $\frac{b - a_2}{a_2 - a_1} = j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $j \geq 2$, то тогда полу-

чим, что или $\lambda_{l=jm} = \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$), или $\lambda_{m=jl} = \lambda_l$ ($l = 1, 2, \dots$), и тогда ситуация с тремя собственными функциями, отвечающими одному и тому же собственному значению, повторится. Если $a_2 - a = b - a_2$, то тогда собственные значения λ_s и λ_m — попарно совпадают, и любому λ_s будут отвечать три собственные функции. Две из них определяются формулами (4) и (5), а третья имеет вид

$$u(t, \lambda_s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a))}{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a))} \sin(\sqrt{\lambda_s}(a_1 - a)) & (a \leq t \leq a_1), \\ \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_s}(t - a)) & (a_1 \leq t \leq a_2), \end{cases} \quad (7)$$

$u(t, \lambda_s) = \sin(\sqrt{\lambda_s}(t - b)) \quad (a_2 \leq t \leq b)$. Если или $\frac{a_2 - a}{b - a_2} = j$, или $\frac{b - a_2}{a_2 - a} = j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $j \geq 2$, то тогда получим, что или $\lambda_{s=jm} = \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$), или

$\lambda_{m=js} = \lambda_s$ ($s = 1, 2, \dots$), и тогда ситуация с тремя собственными функциями, отвечающими одному и тому же собственному значению, также повторится. Если или $\frac{a_2 - a_1}{a_2 - a} = j$, или $\frac{a_2 - a}{a_2 - a_1} = j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $j \geq 2$, то тогда получим, что или $\lambda_{l=js} = \lambda_s$ ($s = 1, 2, \dots$), или $\lambda_{s=jl} = \lambda_l$ ($l = 1, 2, \dots$), тогда соответствующему положительному собственному значению или λ_l , или λ_s будут отвечать две собственные функции, определенные формулами (3) и (4). Если или $\frac{a_1 - a}{a_2 - a} = j$, или $\frac{a_2 - a}{a_1 - a} = j$, где $j \in \mathbb{N}$ и $j \geq 2$, то тогда получим, что или $\lambda_{k=jr} = \lambda_r$ ($r = 1, 2, \dots$), или $\lambda_{r=jk} = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$), тогда соответствующему отрицательному собственному значению или λ_k , или λ_r будут отвечать две собственные функции, определённые формулами (1) и (2). Если $a_1 - a = b - a_2$ и при этом $\frac{a_2 - a}{a_1 - a} = j$ (или, что то же самое, $\frac{a_2 - a}{b - a_2} = j$), где $j \in \mathbb{N}$ и $j \geq 2$, то тогда положительному собственному значению $\lambda_{s=jl=jm} = \lambda_l = \lambda_m$ ($l, m = 1, 2, \dots$), будут отвечать пять собственных функций. Они определяются формулами (3)–(7).

Пример 4. В случае краевых задач

$$\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_3) {}^2_P x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_P x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_P x(a_0) = {}^0_P x(a_1) = {}^0_P x(a_3) = {}^0_P x(a_4) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1 \quad (8)$$

$$\text{и } \sigma(t - a_1)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_5)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_4)\sigma(t - a_5) {}^2_P x(t) =$$

$$= -\lambda p_{22}(t) {}^0_P x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_P x(a_0) = {}^0_P x(a_1) = {}^0_P x(a_3) = {}^0_P x(a_5) = {}^0_P x(a_6) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = \rho_5 = 1, \quad (9)$$

второе из условий (3.2), как это несложно проверить, в задачах (8) и (9) не выполняется, и в этих случаях исходные задачи не являются ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2). Особенностью краевых условий в задачах (8) и (9) является то, что функция $\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_3)$ в задаче (8) и функция $\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_5)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_4)\sigma(t - a_5)$ в задаче (9), в левой части уравнений, обе будут отрицательными на отрезке $[a, a_1]$, и оба уравнения примут вид: ${}^2_P x(t) = \lambda p_{22}(t) {}^0_P x(t)$ ($t \in [a, a_1]$). Следовательно, отрицательные собственные значения у исходной задачи могут появиться, например, в случае, если P -единичная матрица третьего порядка, не только при решении простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[a_1, a_3]$ в задаче (8)

(или индефинитной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[a_1, a_5]$ в задаче (9)), но и при решении простейшей задачи Штурма – Лиувилля:

$${}^2_p x(t) = \lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in [a, a_1]), \quad {}^0_p x(a) = {}^0_p x(a_1) = 0. \quad (10)$$

Задача (8) является прямой суммой простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля, рассматриваемой на отрезке $[a_1, a_3]$, и простейших задач Штурма – Лиувилля, рассматриваемых на отрезках $[a, a_1]$ и $[a_3, b]$. Задача (9) является прямой суммой индефинитной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[a_1, a_5]$ и простейших задач Штурма – Лиувилля на отрезках $[a, a_1]$ и $[a_5, b]$.

Пример 5. Рассмотрим две задачи с краевыми условиями, которые получаются из краевых условий задач (8) и (9), за счёт «удаления» дефекта в «предпоследней» точке отрезка $[a, b]$, а, именно,

$$\sigma(t - a_1) \sigma(t - a_3) \sigma(t - a_1) \sigma(t - a_2) {}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_p x(a_0) = {}^0_p x(a_1) = {}^0_p x(a_3) = {}^0_p x(a_4) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (11)$$

и

$$\sigma(t - a_1) \sigma(t - a_3) \sigma(t - a_5) \sigma(t - a_1) \sigma(t - a_2) \sigma(t - a_4) {}^2_p x(t) =$$

$$= -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_p x(a_0) = {}^0_p x(a_1) = {}^0_p x(a_3) = {}^0_p x(a_5) = {}^0_p x(a_6) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = 1. \quad (12)$$

Второе из условий (3.2) в задачах (11) и (12) выполняется, условия ОР, как это несложно проверить, также выполняются. Отрицательные собственные значения в задачах (11) и (12) уже не могут появиться, например, в случае, если P – единичная матрица третьего порядка, за счёт решения задачи вида (10), так как задача (10) здесь не возникает, вместо нее имеет место следующая задача:

$${}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in [a, a_1]), \quad {}^0_p x(a) = {}^0_p x(a_1) = 0.$$

Задача (11) не является прямой суммой простейшей индефинитной задачи Штурма – Лиувилля, рассматриваемой на отрезке $[a_1, a_3]$, и простейших задач Штурма – Лиувилля, рассматриваемых на отрезках $[a, a_1]$ и $[a_3, b]$. Также задача (12) не является прямой суммой индефинитной задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[a_1, a_5]$ и простейших задач Штурма – Лиувилля, рассматриваемых на отрезках $[a, a_1]$ и $[a_5, b]$. Задачи (11) и (12) это ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2). Теорема 2 в задачах (11) и (12) применима. Второе из краевых условий (3.2) может быть и выполненным, но при этом условия ОР не выполняются. Отрицательные собственные значения у исходной задачи могут появиться, например, в случае, если P – единичная матрица третьего порядка, за счёт решения индефинитной задачи Штурма-Лиувилля. Приведем два примера такого типа.

Пример 6. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\sigma(t - a_1) \sigma(t - a_2) \sigma(t - a_2) \sigma(t - a_3) {}^2_p x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}^0_p x(t) \quad (t \in J),$$

$${}^0_p x(a_0) = {}^0_p x(a_1) = {}^0_p x(a_2) = {}^0_p x(a_4) = 0, \quad \rho_2 = \rho_3 = 1, \quad 4 = 2 + 2. \quad (13)$$

Эта задача является ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2). Левый индекс точки a_2 в этом примере равен $2 + 0 - 3 = -1$, а правый индекс точки a_2 равен $2 + 1 - 2 = 1$. Условия ОР в примере 6 не выполняются и теорема 2 неприменима, так как левый индекс точки a_2 отрицателен. Любое решение задачи (13) на отрезке $[a, a_2]$ равно нулю, в противном случае в точке a_1 появится «лишний» дефект, равный единице. В этом примере простейшая индефинитная задача Штурма – Лиувилля имеет место на отрезке $[a_2, b]$.

Пример 7. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\sigma(t - a_2)\sigma(t - a_3)\sigma(t - a_1)\sigma(t - a_2) {}_P^2x(t) = -\lambda p_{22}(t) {}_P^0x(t) \quad (t \in J),$$

$${}_P^0x(a_0) = {}_P^0x(a_2) = {}_P^0x(a_3) = {}_P^0x(a_4) = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad 4 = 2 + 2. \quad (14)$$

Эта задача также является ОЗВП вида (2.1), (3.1), (3.2). Левый индекс точки a_2 в этом примере равен $2 + 1 - 2 = 1$, а правый индекс точки a_2 равен $2 + 0 - 3 = -1$. Поэтому условия ОР в примере 7 также не выполняются, теорема 2 здесь неприменима. Любое решение задачи (14) на отрезке $[a_2, b]$ равно нулю, в противном случае в точке a_3 появится «лишний» дефект, равный единице. В этом примере простейшая индефинитная задача Штурма – Лиувилля имеет место на отрезке $[a, a_2]$.

На этом закончим рассмотрение примеров и исследование структуры спектра многоточечных краевых задач для обыкновенного и квазидифференциального уравнений второго порядка.

Список литературы

1. *Ватолкин, М. Ю.* О структуре спектра некоторых многоточечных краевых задач для уравнения второго порядка [см. настоящий сборник материалов конференции].
2. *Варга, Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. – Москва : Мир, 1974. – 128 с.
3. *Крылов, А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. – Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. – 386 с.
4. *Тимошенко, С. П.* Колебания в инженерном деле. – Москва : Наука, 1967. – 444 с.
5. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. – Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. – 359 с.

Моделирование и визуализация движения метаемого тела с интеллектуальной системой наведения на цель

Д. Т. Гарипов, Д. Г. Нефедов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Работа посвящена математическому моделированию и визуализации движения метаемого тела с интеллектуальной системой наведения на цель. Разработанная система наведения основана на решении задач обратной баллистики и определения координат цели по данным цифровых снимков с использованием искусственных нейронных сетей. Для визуализации движения метаемого тела с интеллектуальной системой наведения разработан программный модуль в среде разработки Unity 3D. Данный модуль реализует следующий функционал: отображение карты выбранного участка местности с расположенными на нем метаемой установкой и мишенью, использование элементов графического пользовательского интерфейса для настройки основных параметров объектов моделирования и управления запуском визуализации движения метаемого тела.

Ключевые слова: внешняя баллистика, нейронные сети, визуализация, гео-данные, интеллектуальное наведение.

Введение

Создание автономных систем наведения, способных распознавать цели и корректировать траекторию движения без участия оператора, является актуальной задачей в условиях развития технологий искусственного интеллекта. Особенно важна такая автоматизация в оборонной сфере, где требуется высокая точность и скорость реагирования.

Цель исследования – разработка математической модели и визуализация движения метаемого тела с интеллектуальной системой наведения, основанной на решении задач обратной баллистики и распознавании целей по цифровым снимкам с использованием нейронных сетей. Для наглядного представления реализован программный модуль в Unity 3D, обеспечивающий настройку параметров и отображение процесса наведения.

1. Математическая постановка задачи наведения и корректировки стрельбы

Для решения прямой задачи внешней баллистики строится система дифференциальных уравнений, описывающих изменение координат снаряда и траекторных параметров под действием внешних сил [1].

Представим результаты решения прямой задачи внешней баллистики в виде функции:

$$y = (\mathbf{P}_k, \tau_k) = \Phi_1(\mathbf{P}_0, V_0, \alpha_c, \theta_0, \mathbf{A}). \quad (1)$$

Здесь обозначено $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k, z_k)$ – координаты точки падения снаряда; τ_k – время полета снаряда; $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – координаты точки расположения орудия; V_0 – начальная скорость снаряда; $\alpha_{ц}$ – дирекционный угол цели; θ_0 – угол стрельбы. Вектор \mathbf{A} содержит параметры, характеризующие баллистические, геофизические и метеорологические условия стрельбы.

Решение обратной задачи внешней баллистики заключается в определении обратного преобразования:

$$\mathbf{z} = (\alpha_{ц}, \theta_0) = \Phi_2(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{ц}, V_0, \mathbf{A}), \quad (2)$$

где $\mathbf{P}_{ц} = (x_{ц}, y_{ц}, z_{ц})$ – координаты цели.

Решение прямой задачи (1) реализовано с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Путем многократного решения прямой задачи при варьировании углов $\alpha_{ц}$ и θ_0 , температуры T_a и давления P_a воздуха, направления α_w и скорости w ветра и других параметров формируется база данных вычислительных экспериментов:

$$(\mathbf{x}^h; \mathbf{y}^h) = (x_0^h, y_0^h, z_0^h, V_0^h, \alpha_{ц}^h, \theta_0^h, T_a^h, P_a^h, \alpha_w^h, w^h, \dots; x_k^h, y_k^h, z_k^h, \tau_k^h), \quad h = \overline{1, H}, \quad (3)$$

где H – количество экспериментов.

Для решения обратной задачи (2) используется многослойная нейронная сеть. Для обучения данной сети используется выборка данных (3). Реализована нейронная сеть на языке Python с использованием библиотеки Keras [2]. В качестве алгоритма оптимизации применялся метод Adam.

Решение прямой и обратной задач внешней баллистики реализовано в виде desktop-приложения, позволяющего сохранять рассчитанные весовые коэффициенты и структуру нейронной сети в виде отдельного файла [3, 4].

2. Разработка системы визуализации движения метаемого тела

Система визуализации движения метаемого тела предназначена для моделирования траектории полета, анализа результатов поражения цели и интерактивного отображения процессов в реальном времени. Архитектура системы (рис. 1) включает следующие ключевые компоненты:

1. Расчетный модуль решения прямой задачи ВБ – решает прямую задачу внешней баллистики для предполагаемых баллистических параметров системы.

2. Нейросетевой модуль решения обратной задачи ВБ – осуществляет обучение нейронной сети для решения обратной задачи внешней баллистики по сформированной базе данных вычислительных экспериментов.

3. Расчетный модуль наведения/корректировки – реализует алгоритмы расчета углов наведения артиллерийского орудия на цель с использованием обученной нейронной сети и расчета поправок к углам наведения по данным об отклонении точек падения снаряда от цели поражения.

4. Модуль визуализации – осуществляет интерактивное отображение всех этапов моделирования.

5. Нейросетевой модуль определения цели и координат – решает задачу автоматического обнаружения объектов и их координат по данным цифровых снимков.

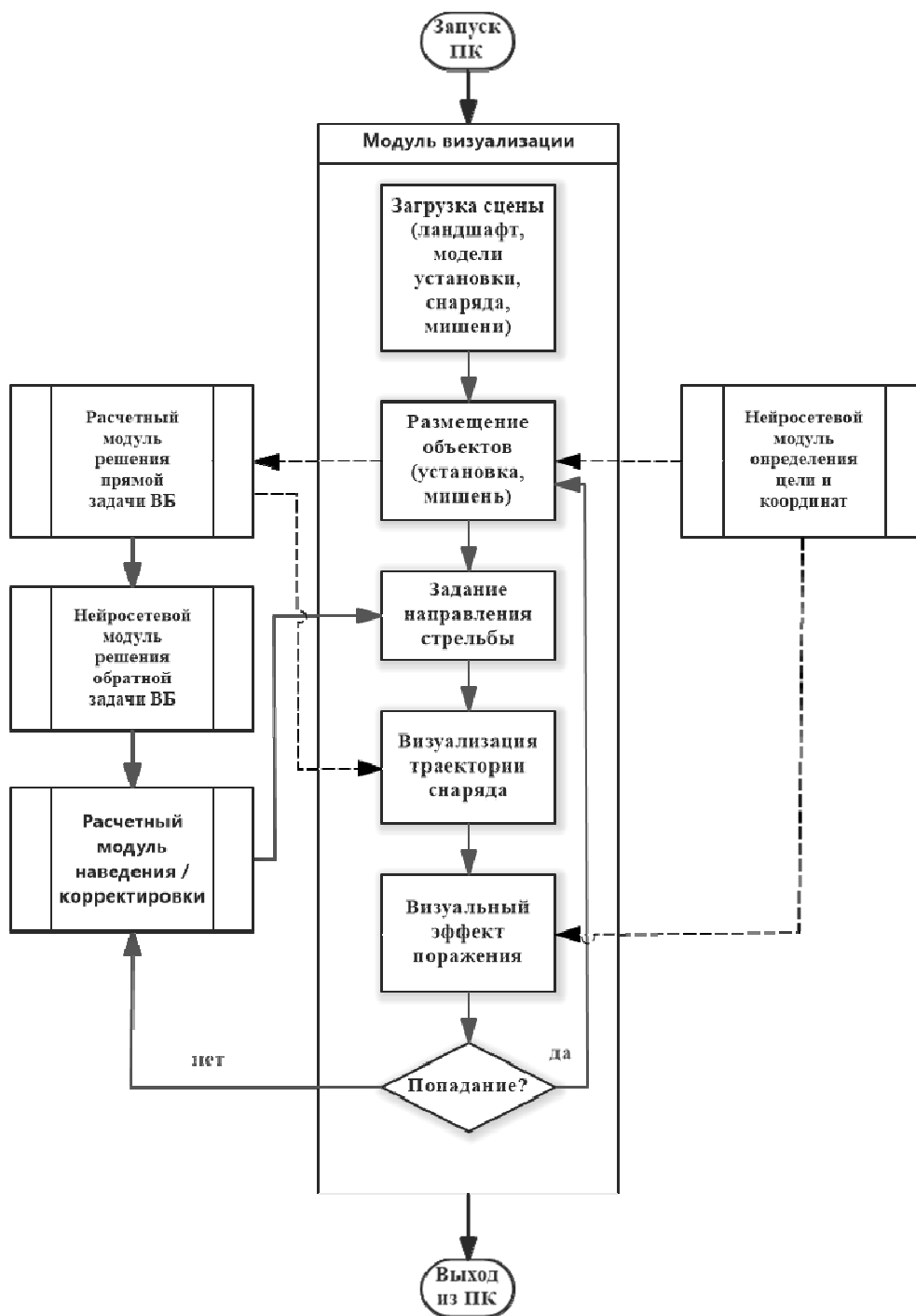


Рис. 1. Структурная схема системы визуализации движения метаеого тела

Блок визуализации обеспечивает интерактивное отображение всех этапов моделирования. Процесс инициируется запуском системы, после которого осуществляется загрузка сцены, включающей ландшафт, модели артиллерийской установки, боеприпаса и мишени.

Разработка приложения основана на системе визуализации Unity. Создание окружающего ландшафта и отображение карты местности производится с использованием геоданных, получаемых из программы SRTM (Shuttle Radar Topography Mission). Выбор целевой точки на поверхности Земли позволяет

скачать соответствующий участок карты. Полученные данные преобразуются в требуемый формат файла ландшафта с возможным уменьшением масштаба выделенного района. Далее файл импортируется в Unity и конвертируется в виртуальное пространство с применением плагина Unity GeoDataLoader [5].

На следующем этапе осуществляется размещение объектов на карте. Данные о местоположении объектов поступают из нейросетевого модуля определения цели и координат либо загружаются из файла с координатами. Расчетный модуль наведения определяет направление стрельбы установки по мишени. После выбора направления производится визуализация траектории полета боеприпаса и эффекта поражения. По завершении данных этапов система анализирует результат попадания. В случае успешного поражения мишени осуществляется возврат к этапу размещения объектов. При промахе производится переход к расчетному модулю корректировки с последующим возвратом к этапу задания направления стрельбы.

Таким образом, система визуализации обеспечивает комплексное моделирование стрельбы, начиная от подготовки данных и заканчивая отображением результатов, что позволяет анализировать и корректировать параметры стрельбы в виртуальной среде.

3. Результаты визуального моделирования

Разработка системы визуализации движения метаемого тела основана на создании базовых моделей, обеспечивающих проверку взаимодействия ключевых компонентов. Упрощенные модели, реализованные на начальном этапе, демонстрируют системы и формируют основу для последующего усложнения. Исключение дополнительных настроек позволяет сосредоточиться на корректности функциональных связей между модулями и их базовой работоспособности.

Для тестирования основного функционала был загружен исходный ландшафт (рис. 2).



Рис. 2. Интерфейс Unity с созданным ландшафтом

Цель представлена в виде примитива для упрощения анализа попаданий (рис. 3).

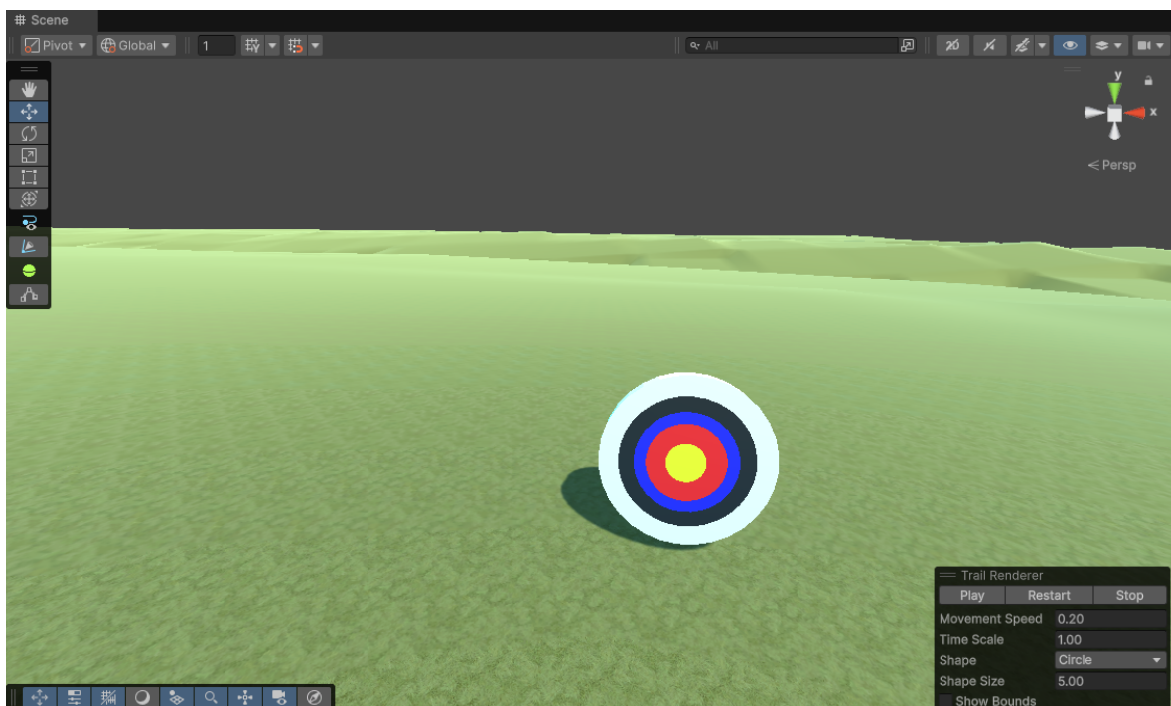


Рис. 3. Модель мишени в Unity

В качестве модели артиллерийской установки была выбрана советская гаубица образца 1938 года (рис. 4).



Рис. 4. Модель артиллерийской установки

Все модели показаны в упрощенном виде. Данные решения обеспечивают минимально необходимую визуализацию для тестирования системы. Они

служат отправной точкой для дальнейшей модификации, адаптации к сложным сценариям и интеграции дополнительных эффектов. Результаты подтверждают работоспособность архитектуры и готовность к поэтапному расширению функционала [5].

Для работы системы моделирования движения снаряда была выполнена визуализация баллистических траекторий. На представленном рис. 5 отражены три ключевых сценария: 1 – теоретическая траектория, рассчитанная математической моделью без внешних воздействий; 2 – пристрелочная траектория; 3 – скорректированная.

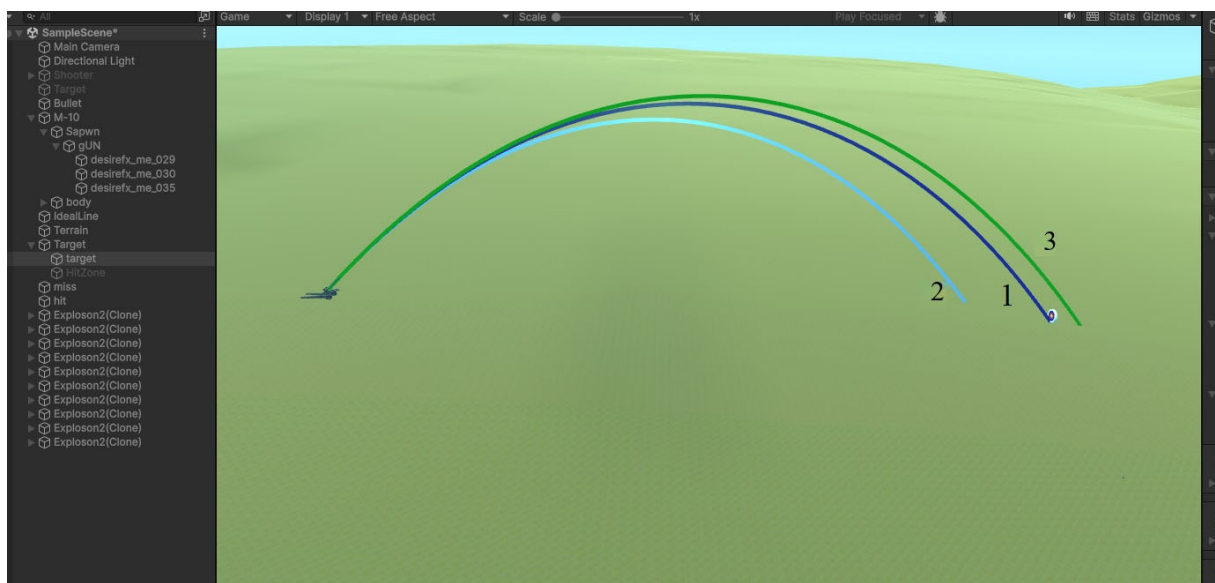


Рис. 5. Моделирование движения метаемого тела

Представленная визуализация подтверждает корректность работы системы: зеленая траектория демонстрирует успешное достижение цели при минимальном отклонении, синяя служит эталоном для верификации физической модели, а голубая позволяет анализировать результат промаха для дальнейшей корректировки наведения. Результаты доказывают готовность архитектуры к дальнейшему усложнению модели.

Заключение

Разработанная система демонстрирует возможности интеграции методов искусственного интеллекта и технологий визуализации для построения интеллектуальных систем наведения. Созданный программный модуль может использоваться как в учебных целях, так и как основа для разработки систем артиллерийского вооружения.

Список литературы

1. Новиков, В. Г. Математические модели систем наведения летательных аппаратов: учебное пособие. – Коломна : Изд-во КИ(ф) МГОУ, 2011. – 112 с.
2. Rashka S. Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, Scikit-Learn, and TensorFlow 2. PacktPublishing, 2019. 770 p.

3. *Королев, С. А.* Интеллектуальная система автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки // Интеллектуальные системы в производстве. – 2024. – Т. 22, № 3. – С. 85–91. – DOI: 10.22213/2410-9304-2024-3-85-91.

4. Программа расчета углов наведения и корректировки стрельбы. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2023615914, 20.03.2023. Авторы: Королев С. А., Нефедов Д. Г., Русяк И. Г.

5. Unity Technologies. Перемещение объектов // Документация Unity. – URL: <https://docs.unity3d.com/ru/current/Manual/TransformComponent.html> (дата обращения: 28.03.2025).

Расширение возможностей при взаимодействии человека с искусственным интеллектом

К. И. Дизендорф

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Искусственный интеллект все глубже проникает в нашу жизнь. Возникают вопросы, связанные с его внедрением в современные бизнес-процессы. В статье рассматриваются подходы к организации взаимодействия человека и систем искусственного интеллекта в структуре организаций.

Ключевые слова: искусственный интеллект, бизнес-процессы, взаимодействие человека и искусственного интеллекта.

В связи с активным развитием систем искусственного интеллекта людей очень интересуют вопросы: что такое искусственный интеллект, что принесет человечеству его использование, какие риски возникают при его применении [1, 2, 3, 4]. Много исследований посвящено применению таких систем в системе образования [5, 6, 7, 8]. Применение искусственного интеллекта влечет за собой необходимость учесть его влияние на права человека [9].

В настоящее время бытует мнение, что системы на основе искусственного интеллекта будут все больше и больше вытеснять людей с рынка труда, заменяя их практически во всех отраслях. Некоторые исследования показывают, что сочетание человеческих возможностей с интеллектуальными системами может привести к прорывным решениям в организации бизнес-процессов в самых различных отраслях [10, 11].

Руководители компании Accenture считают, что оптимальное сочетание человека и искусственного интеллекта происходит, когда каждый занимается тем, что у него получается лучше всего: машины – выполняют повторяющиеся рутинные задачи и анализируют огромные массивы данных, а люди – работают с неоднозначной информацией, анализируют сложные случаи и общаются с недовольными клиентами [10].

Если заглянуть в историю, то первая волна трансформации (стандартизация процессов) произошла в период внедрения конвейерной системы работы. Вторая волна (автоматизация процессов) пришла в период широкого внедрения компьютерной техники. На подходе третья волна, которая предполагает использование систем искусственного интеллекта. Она предполагает, что компании должны стать более гибкими и быстрыми, а также легко адаптироваться к поведению, предпочтениям и потребностям своих клиентов в любой момент [10].

Способность к адаптации будет опираться на обработку данных в режиме реального времени, вместо жестко заданной последовательности действий, присущей первой и второй волне. И будет ориентироваться на персонализированные продукты и услуги (в отличие от массовой продукции вчерашнего дня).

Уже давно массовая культура (фантастические книги и фильмы) культивируют идею противостояния человека и машины. Это показывают, например, фильм «2001: Космическая одиссея», снятый по мотивам рассказов Стенли Кубрика (1968 год) и все серии «Терминатора» (1984–2019 годы). Это формирует представление о машинах как врагах человечества, что в настоящее время становится не только заблуждением, но и критической недалководидностью. В современных условиях системы искусственного интеллекта не заменяют людей, а расширяют их возможности и сотрудничают с ними, позволяя повысить производительность и достигать результатов, которые ранее считались невозможными.

Раньше деятельность человека и машин была четко разграничена. Машины выполняли типовые повторяющиеся операции, строили прогнозные модели на основе больших массивов данных, а люди – занимались творчеством, строили умозаключения в различных областях знаний, продвигали идеи. Этого было достаточно на первых двух волнах трансформации (стандартизация и автоматизация). Но сейчас есть возможность сочетать деятельность человека и машины, что приводит к новым видам деятельности, которые исследователи компании Accenture называют «недостающей серединой» [10].

В этой области возникают новые функции. Люди проводят обучение машин выполнению операций, разъясняют результаты, которые получены машинами, а также обеспечивают работу машин. В свою очередь, машины усиливают способность людей понимать суть явлений и процессов посредством использования методов анализа больших данных, все более эффективно взаимодействуют с людьми с помощью новейших интерфейсов (виртуальная и дополненная реальность), а также позволяют выполнять операции, ранее людям не доступные.

Именно в этом состоит одна из главных составляющих трансформации бизнес-процессов – эффективное использование «недостающей середины». Но это только одна из сторон преобразования процессов. Второй, не менее важной, составляющей является изменение структуры процесса – процесс перестал быть линейным (последовательным), он становится адаптивным к внешним условиям (запросам клиентов). Соответственно, продукты и услуги вместо массовых становятся персонализированными, что повышает удовлетворенность клиента, а значит, и перспективную прибыль компании.

Все эти новшества должны внедряться через призму «ответственного искусственного интеллекта» [10]. То есть нельзя оставлять в стороне вопросы этики, морали и юридического права. Эти аспекты также регулярно поднимаются исследователями [4, 9, 10].

В качестве примера компании, успешно реализовавшей «недостающую середину», исследователи приводят пример компании Stitch Fix, занимающейся

персонализированной продажей одежды [10]. На основе предпочтений, указанных клиентом, компания подбирает одежду и доставляет ее клиенту. Здесь совместно и весьма эффективно трудятся люди и машины. На основе структурированной информации (стиль, размеры и предпочтения тех или иных брендов) машины сокращают количество подходящих вариантов. А уже с конечным набором, составленным машиной, стилисты завершают формирование предложения, опираясь на неструктурированную информацию (цель поиска одежды, заинтересовавшие картинки с моделями). На этом взаимодействие машины и человека не заканчивается: они обучаются – машина по результатам приема/отклонения предложения, стилист по текстовым отзывам клиентов. Работа стилистов стала более творческой – нет необходимости просматривать модели, которые клиенту заведомо не подойдут, есть возможность сосредоточиться на подходящих моделях и их особенностях.

На основе результатов исследования [10] рассмотрим виды деятельности, лежащие в «недостающей середине». Сначала рассмотрим три функции, которые выполняют люди, дополняющие деятельность машин, а затем перейдем к «обратным» функциям, где машины усиливают человека.

Специалисты по обучению машин. Роботизированные системы требуют обучения, чтобы они могли выполнять необходимые операции и при этом не повредили заготовку или рядом расположенное другое оборудование, или сами не вышли из строя. Кроме роботов, обучение требуется и для интеллектуального программного обеспечения. Например, системы распознавания естественного языка, или системы перевода на другой язык. В настоящее время при использовании голосовых помощников и чат-ботов возникает необходимость реакции не только на слова собеседника, но и на его интонацию или темп речи.

Специалисты по разъяснению требуются, например, для устранения разрыва между неочевидными, а иногда и противоречащими общепринятым представлениям, рекомендациями машин и мнением лиц, принимающих решения. У многих вызывает беспокойство то, что они не понимают, как машина пришла к тем или иным выводам и можно ли ей доверять.

Эксперты по устойчивости занимаются принятием решений по коррекции поведения машин, опираясь на соображения рентабельности или на этические или правовые нормы. В итоге должна повышаться ценность применения машин для работников и клиентов, а также эффективность работы системы с искусственным интеллектом. Фактически они выполняют функцию верификаторов деятельности машин.

Теперь о том, что получает человек от сотрудничества с машиной.

Во-первых, расширение возможностей. Интеллектуальные агенты предоставляют специалистам результаты анализа данных, в том числе, поступающих в реальном времени. Это позволяет быстрее принимать решения, опираясь на интегральные показатели. Медицинское программное обеспечение, например, предоставляет рентгенологам результаты анализа снимков, позволяя ускорить постановку диагноза и повышая его точность.

Во-вторых, в области взаимодействия разработаны современные интерфейсы (такие как обработка естественного языка с использованием голосового управления), которые позволяют наладить простой контакт между человеком и интеллектуальным агентом – персональным помощником или чат-боты служб поддержки клиентов (умные колонки, техподдержка банков, операторов сотовой связи).

В-третьих, физическое воплощение – искусственный интеллект проникает в датчики, двигатели, приводы, что позволяет людям и искусственному интеллекту работать рядом и выполнять совместно физическую работу. Это манипуляторы, умные тележки на складах, дроны для доставки и так далее.

При правильном подходе искусственный интеллект позволяет сотрудникам заниматься теми видами деятельности, которые больше подходят людям, а не роботам. При этом кратно возрастает эффективность деятельности компании и появляется возможность более детально учесть предпочтения клиента, что также имеет положительный эффект для компании [10].

Стоит отметить, что настало время переосмысления организации образовательного процесса в эпоху повсеместного внедрения искусственного интеллекта [5–8]. Часть рутинных действий можно переложить на умных помощников, а также предлагать обучающимся разработанные под них индивидуальные траектории обучения. Но не стоит забывать, что педагог сам является участником процесса обучения, и его развитие и как профессионала, и как человека тоже может проходить при непосредственном участии интеллектуальных технологий.

Список литературы

1. *Кушнир, Н. В.* Взаимодействие искусственного интеллекта и человека в современном мире / Н. В. Кушнир, А. В. Кушнир, А. М. Гриднёва // Научные труды КубГТУ : электронный сетевой политематический журнал. – 2020. – № 2. – С. 1–10.

2. *Черниговская, Т. В.* Естественный и искусственный интеллект: смыслы или структуры? // Человек и системы искусственного интеллекта / под ред. акад. РАН В. А. Лекторского. – Санкт-Петербург : Юридический центр, 2022. – С. 160–171.

3. *Сычев, М. О.* Человек и искусственный интеллект, от любви до ненависти, от создания до страха // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2022. – Т. 3. – С. 892–895.

4. *Шевко, Н. М.* Риски, связанные с управлением искусственным интеллектом: взгляд со стороны // Проблемы и перспективы правового регулирования налоговых отношений в Республике Беларусь на современном этапе : материалы научного круглого стола. – Минск, 2024. – С. 119–121.

5. *Лукичев, П. М.* Применение искусственного интеллекта в системе высшего образования / П. М. Лукичев, О. П. Чекмарев // Вопросы инновационной экономики. – 2023. – Т. 13, № 1. – С. 485–502.

6. *Осипова, Л. Б.* Искусственный интеллект в образовании: реальные возможности и перспективы // Вестник ПНИПУ. Социально-экономические науки. – 2024. – № 1. – С. 60–73.

7. *Бажев, А. А.* Применение искусственного интеллекта в системе образования / А. А. Бажев, А. З. Бажев // *Международный студенческий научный вестник*. – 2024. – № 2. – С. 31.

8. *Илюшин, Л. С.* Технологии искусственного интеллекта как ресурс трансформации образовательных практик / Л. С. Илюшин, Н. А. Торпашёва // *Ярославский педагогический вестник*. – 2024. – № 3 (138). – С. 62–71.

9. *Алешкова, И. А.* Искусственный интеллект и его взаимосвязь с правами человека (обзор) // *Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литература. Серия 4: Государство и право*. – 2021. – № 1. – С. 70–78.

10. *Человек + машина. Новые принципы работы в эпоху искусственного интеллекта* / П. Доэрти, Дж. Уилсон; пер. с англ. О. Сивченко, Н. Яцюк; [науч. ред. М. Григорьева, А. Кучма, А. Епишев, Е. Кученева]. – Москва : Манн, Иванов и Фербер, 2019. – 278 с.

11. *Самохина, Т. Р.* Искусственный интеллект как инструмент для повышения эффективности бизнес-процессов в условиях современного дизайна // *Бизнес и дизайн ревю*. – 2023. – № 4 (32). – С. 134–144.

Оценки числа k -дольных орграфов с единичными полустепенями вершин

Ицков А. Г.

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Рассматривается комбинаторная задача о подсчете количества k -дольных графов с заданными числами занумерованных вершин в долях, имеющих единичные полустепени для каждой вершины. Приводятся вычисления для некоторых частных случаев и общая формула. Выводится оценка, полученная с помощью композиции матриц перестановок.

Ключевые слова: k -дольные графы, полустепени вершин, беспорядки, матрицы перестановок.

Задачи перечисления графов являются весьма актуальными не только для самой теории графов, но и для многих приложений. Имеется немало проблем в физике, химии, биологии, статистике, экономике и др., сводящихся к подсчету числа объектов, представимых графами, обладающими заданными свойствами. В литературе можно найти много публикаций по данной тематике, например [1–3], существуют даже монографии по перечислению графов [4]. В большинстве случаев известны алгоритмы, позволяющие построить все графы определенного вида, но редко можно найти формулы, дающие точный ответ или удобные оценки для количества графов.

В данной работе исследуется вопрос о перечислении k -дольных орграфов (определение приводится ниже). Этот вид графов также вызывает большой интерес, так как они могут быть использованы, в частности, в статистической физике и теории информационных систем [5].

Ориентированный граф G (орграф) с множеством занумерованных вершин M называется k -дольным, если M можно разбить на подмножества (доли) M_1, M_2, \dots, M_k так, что любая дуга соединяет только вершины из разных подмножеств. Обозначим число вершин в подмножествах через m_1, m_2, \dots, m_k ,

$\sum_{i=1}^k m_i = n$ – общее число вершин G .

Рассмотрим перестановки $f: M \rightarrow M$ на множестве M , удовлетворяющие условию: если $x \in M_i$, то $y = f(x) \in M_j, i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j$. Другими словами, перестановки f переводят элементы одних подмножеств в другие подмножества. Каждая такая перестановка определяет k -дольный граф с дугами (x, y) , в которых полустепени исхода и захода любой вершины равны 1. Напомним, что полустепени исхода и захода вершины определяются как число дуг, выходящих из данной вершины и, соответственно, входящих в нее. Число переста-

новок, таким образом, совпадает с числом различных k -дольных орграфов с единичными полустепенями вершин. Обозначим это число $P_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$.

Для существования перестановок и соответствующих им орграфов, очевидно, необходимо выполнение неравенства

$$m_i \leq m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_k = n - m_i, \quad (1)$$

для любого $i = 1, 2, \dots, k$.

Приведем значения числа k -дольных графов для некоторых случаев.

1) При $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1, k = n$, число перестановок $P_k(1, 1, \dots, 1)$ равно числу беспорядков D_k , то есть перестановок без неподвижных точек. Как известно,

$$D_k = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{1}{l!}.$$

Это число равно общему количеству орграфов с n занумерованными вершинами, имеющими единичные полустепени исхода и захода.

2) $k = 2$. Необходимо, чтобы $m_1 = m_2 = m$, $P_2(m, m) = (m!)^2$.

3) $k = 3$. Будем считать, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3$.

$$P_3(m_1, m_2, m_3) = m_1! m_2! m_3! \sum_{t=m_3-m_2}^{m_1+m_2-m_3} C_{m_2}^t C_{m_3}^{m_1-t} C_{m_1}^{m_3-m_2+t}$$

Условие (1) означает, что $m_3 \leq m_1 + m_2$.

Если $m_1 = m_2 = m_3 = m$, то формула приобретает вид

$$P_3(m, m, m) = (m!)^3 \sum_{t=0}^m (C_m^t)^3. \quad (2)$$

Результат для общего случая можно получить с помощью формулы включений и исключений.

$$P_k(m_1, m_2, \dots, m_k) n! - \sum (-1)^{\sum_{i=1}^k t_i - 1} (C_{m_1}^{t_1})^2 \dots (C_{m_k}^{t_k})^2 t_1! \dots t_k! (n - \sum_{i=1}^k t_i)!, \quad (3)$$

где сумма берется по всем наборам целых чисел t_1, \dots, t_k , таких, что

$$0 \leq t_1 \leq m_1, \dots, 0 \leq t_k \leq m_k, t_1 + \dots + t_k \geq 1.$$

Далее будем считать, что элементы внутри долей неразличимы. Это означает, что изоморфные орграфы отождествляются, и следует учитывать только количество элементов, переведенных в другие подмножества. Рассмотрим случай равных по численности долей:

$$m_1 = m_2 = \dots = m_k = m_1.$$

Обозначим $S(k, m) = (S_{ij})$ матрицу порядка k , где (S_{ij}) есть число элементов из M_i , перешедших в $M_j, i, j = 1, 2, \dots, m, k, i \neq j$. Каждая такая матрица определяет орграф с единичными полустепенями вершин. Обозначим их число $\tilde{P}_k(m)$.

В отдельных случаях $\tilde{P}_k(m)$ находятся непосредственно.

Так, $\tilde{P}_k(1) = D_k = P_k(1,1,\dots,1), k = 2,3,\dots$

$$\tilde{P}_2(m) = 1 = \frac{1}{(m!)^2} P_2(m,n), m = 1,2,\dots$$

$$\tilde{P}_3(m) = m + 1, \text{ откуда}$$

$$\tilde{P}_3(m,m,m) = \sum_{t=0}^m \left(\frac{m!}{t!(m-t)!} \right)^3 (m!)^3 = (m!) \sum_{t=0}^m (C_m^t)^3,$$

что совпадает с (2).

Общие матрицы $S(k,m)$ можно строить, складывая матрицы $S(k,1)$, получаемые наборами из m беспорядков. Это следует из классических результатов и теоремы Холла о системах различных представителей [1]. Отсюда матрицы $S(k,m)$ порождаются отдельными слагаемыми в символическом разложении

$$(d_1 + d_2 + \dots + d_N)^m, \quad (4)$$

где d_1, d_2, \dots, d_N – различные беспорядки из k элементов, $N = D_k$. Коэффициенты разложения надо считать равными 1, так как порядок, в котором взяты беспорядки, не играет роли. Число слагаемых в (4) равно

$$C_{N+m-1}^m = C_{D_k+m-1}^{D_k}. \quad (5)$$

Для приведенных выше примеров получается по (5):

$$\tilde{P}_k(1) = C_{D_k+1-1}^1 = D_k;$$

$$\tilde{P}_2(m) = C_{D_2+m-1}^m = C_m^m = 1;$$

$$\tilde{P}_3(m) = C_{D_3+m-1}^m = C_{m+1}^m = m + 1.$$

Но в общем случае

$$\tilde{P}_k(m) \leq C_{D_k+m-1}^m, \quad (6)$$

так как разные слагаемые в (4) могут приводить к одной и той же матрице $S(k,m)$. В итоге имеем верхнюю оценку

$$P_k(m,m,\dots,m) \leq (m!)^{2k} C_{D_k+m-1}^m, \quad (7)$$

более удобную для вычислений, чем точная формула (3).

Список литературы

1. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. – Москва : Мир, 2005. – 221 с.
2. Харари, Ф. Теория графов. – Москва : УРСС, 2003. – 304 с.
3. Уилсон, Р. Введение в теорию графов. – Санкт-Петербург : Диалектика, 2019. – 240 с.
4. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – Москва : Мир, 1977. – 328 с.
5. Гананольский, Р. М. Экспоненциальные производящие функции последовательности чисел k -дольных графов // Прикладная дискретная математика. – 2015. – № 1 (27). – С. 84–91.
6. Рыбников, К. А Введение в комбинаторный анализ. – 2-е изд. – Москва : МГУ, 1985. – 308с.

Разработка информационно-аналитической системы предобработки и сегментации временных рядов

И. Н. Красноперов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Представлена разработка аналитической системы с автоматической сегментацией и кластеризацией временных сигналов с использованием сверточного автоэнкодера и методов обучения без учителя. Для анализа использовались сигналы, предварительно разбитые на перекрывающиеся сегменты фиксированной длины. Каждый сегмент был преобразован в спектрограмму с помощью преобразования Фурье, после чего спектрограммы использовались в качестве входных данных для сверточного автоэнкодера. Обучение автоэнкодера проводилось с целью получения компактного латентного представления спектрограмм, описывающих их структурные особенности. Полученные латентные векторы подвергались кластеризации методом K-средних, что позволяло выделить информативные и неинформативные участки сигнала. Визуализация результатов проводилась посредством наложения кластерных меток на исходный сигнал, что обеспечивает наглядную интерпретацию структуры аудиоданных. Разработанная аналитическая система может быть полезна в задачах анализа аудиосигналов и предобработки данных для последующего обучения моделей с учителем.

Ключевые слова: спектрограмма, автоэнкодер, кластерный анализ, сегментация сигналов, кратковременное преобразование Фурье, метод K-средних.

Анализ временных рядов – это мощный инструмент, используемый для анализа и прогнозирования тенденций в различных областях, таких как финансы, инженерия и медицина. В работе описывается метод, основанный на использовании сверточного автоэнкодера, обученного на спектрограммах аудиосигналов. Извлеченные латентные признаки используются для кластеризации методом K-средних, позволяющим разделить сегменты на группы, потенциально соответствующие информативным и неинформативным сегментам.

Сегментация временных рядов относится к процессу разделения временного ряда на несколько экспериментов, где каждый эксперимент содержит разную размерность. Сегментация – важный шаг в анализе временных рядов, поскольку он позволяет исследователям лучше понять основные закономерности и делать более точные прогнозы [1].

Для экспериментов было сконструировано устройство, на валу которого были установлены два подшипника. Скорость вращения изменилась с 0 до 1500 об/мин, удерживалась в течение 30–50 секунд. Вал вращался с помощью двигателя постоянного тока, соединенного с валом через муфту. Радиальная нагрузка в 3,5 кг прикладывается к валу с помощью сбалансированного груза. Подшип-

ники были установлены на валу. Акселерометры *GY-61 ADXL3353* (рис. 1) были установлены на корпусе подшипника и определены ускорения в направлении осей x, y, z [2].

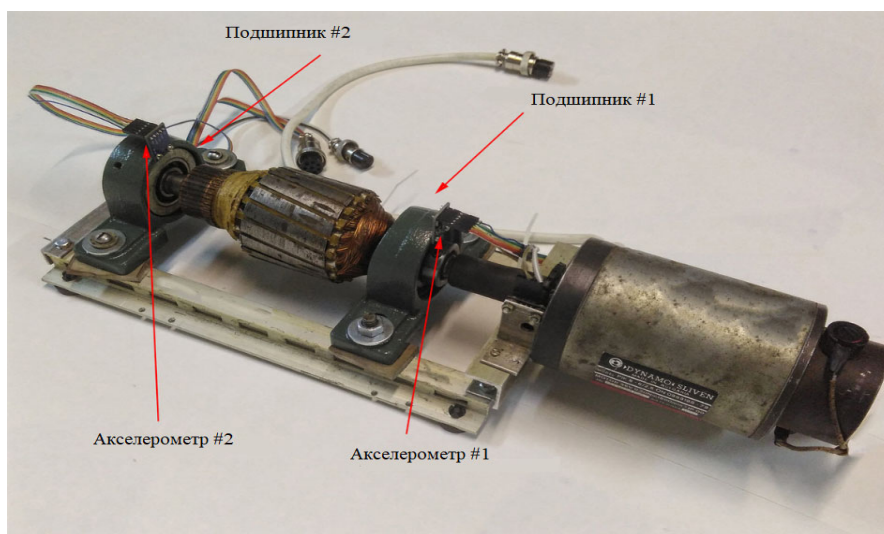


Рис. 1. Расположение датчиков и подшипников на шпинделе

Для того чтобы визуализировать аудио-сигнал, использовалась спектрограмма, представляющая графическое представление звукового сигнала в зависимости от времени, отображающее изменения частотных составляющих сигнала в течение времени, позволяя визуализировать спектральные характеристики звука [3].

Исходный сигнал представляет собой массив, содержащий значения амплитуд аудиосигнала. Для получения спектрограммы необходимо применить алгоритм кратковременного преобразования Фурье к последовательности амплитудных значений. Данный алгоритм преобразует сигнал из временной области в частотную область, раскладывая его на спектральные составляющие [4]:

$$X_{m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w_{n-m} e^{\frac{2\pi nk}{N}},$$

где x_n – исходный сигнал; w_{n-m} – окно, смещенное на m отсчетов; N – длина окна; k – индекс частоты в дискретном спектре.

Для преобразования звукового спектра в децибелы после кратковременного преобразования Фурье высчитываем уровень звукового давления $L_{m,k}$ в дБ по формуле:

$$L_{m,k} = 10 \cdot \lg \left(\frac{|X_{m,k}|^2}{I_0} \right),$$

где $|X_{m,k}|$ – амплитуда спектра в звуке в k -ом частотном диапазоне; I_0 – опорная звуковая интенсивность и $I_0 = 10$.

Результатом данного преобразования является набор значений амплитуд спектра для различных частот. На рис. 2 представлен сигнал и его спектрограмма в логарифмических координатах.

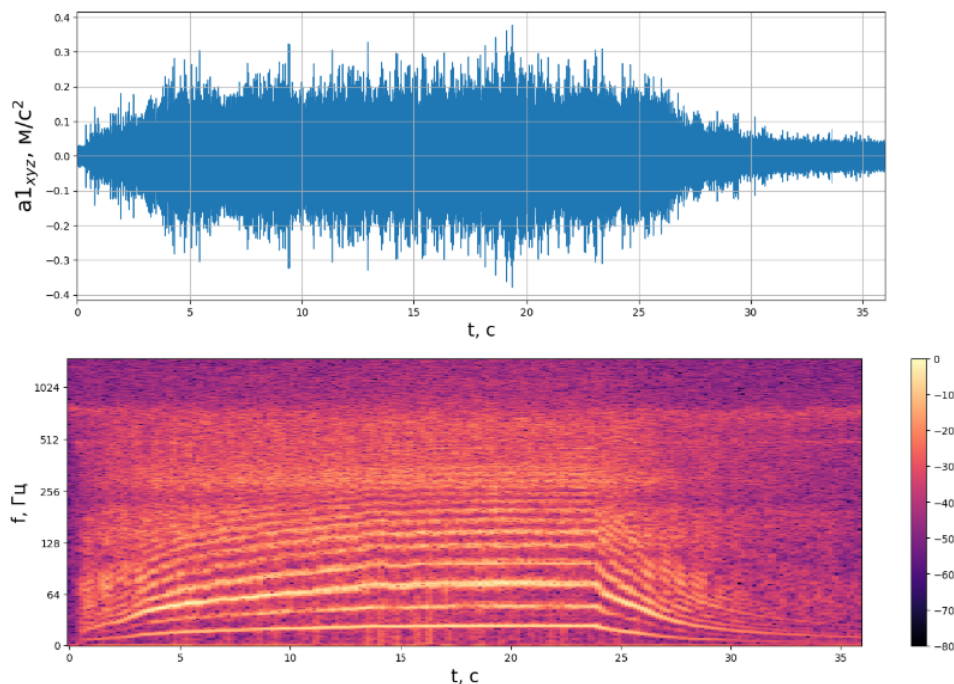


Рис. 2. Сигнал и его спектрограмма

Произведем разбиение спектрограммы на векторы по оси времени, которые называются окнами. Каждое окно представляет собой отдельный временной сегмент сигнала, который используется для вычисления спектральных характеристик $X_1 \dots X_n$, где n – количество разбиений по времени. Полученные фрагменты спектрограмм использовались в качестве входных данных для сверточной нейронной сети.

Модель сверточной нейронной сети построена по принципу автоэнкодера и включает в себя две основные части: энкодер и декодер, каждая из которых состоит из пяти последовательных слоев, выполняющих операции извлечения латентных признаков $X_1 \dots X_n$. Архитектуру модели представим на рис. 3.

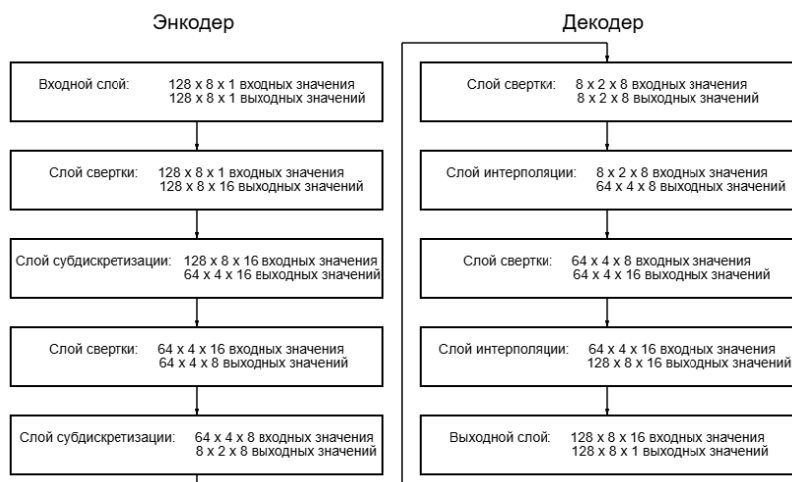


Рис. 3. Архитектура сверточной нейронной сети глубокого обучения

Для кластеризации сигнала использовался алгоритм кластерного анализа K -средних. Данный алгоритм позволяет разделить набор данных на заранее заданное число кластеров на основе их сходства. В качестве меры сходства между фреймами используем расстояние Евклида $d(X_i, C_j)$ [5]:

$$d(X, C) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (X_i - C_j)^2},$$

где X_i – i -й элемент кластера; C_j – j -й элемент центра кластера; n – размерность векторов; k – количество кластеров.

Для реализации алгоритма K -средних задается количество кластеров, а затем случайным образом будет выбираться K центров кластеров из набора фреймов. Далее присваивается каждой точке данных ближайший к ней центр кластера. Это делается путем вычисления евклидова расстояния $d(X_i, C_j)$ между каждой точкой данных и каждым центром кластера, а затем назначением точки к кластеру с наименьшим расстоянием.

На рис. 4 представлены графики двух наборов данных из первого и второго кластера с их центрами.

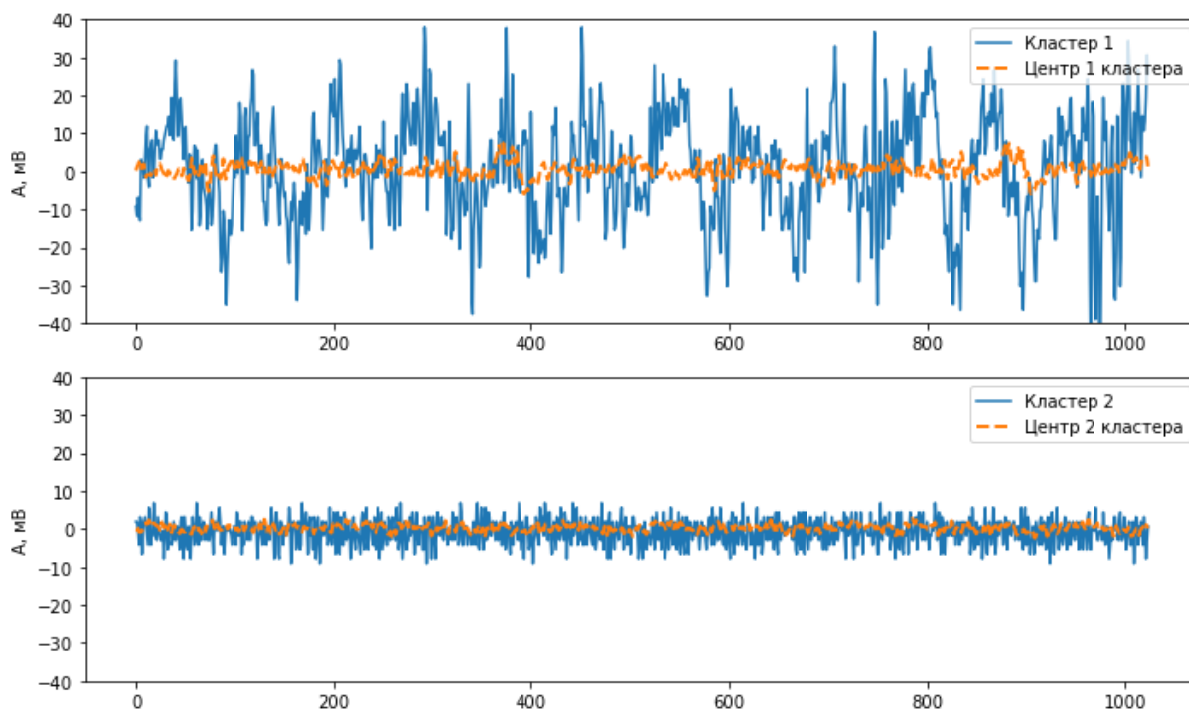


Рис. 4. Графики кластеров

Из рис. 3 можем заметить, что первый кластер имеет более высокую амплитуду, чем второй. На рис. 5 представлены результаты сегментации сигнала (серым цветом выделены элементы 1-го кластера, а желтым – 2-го кластера).

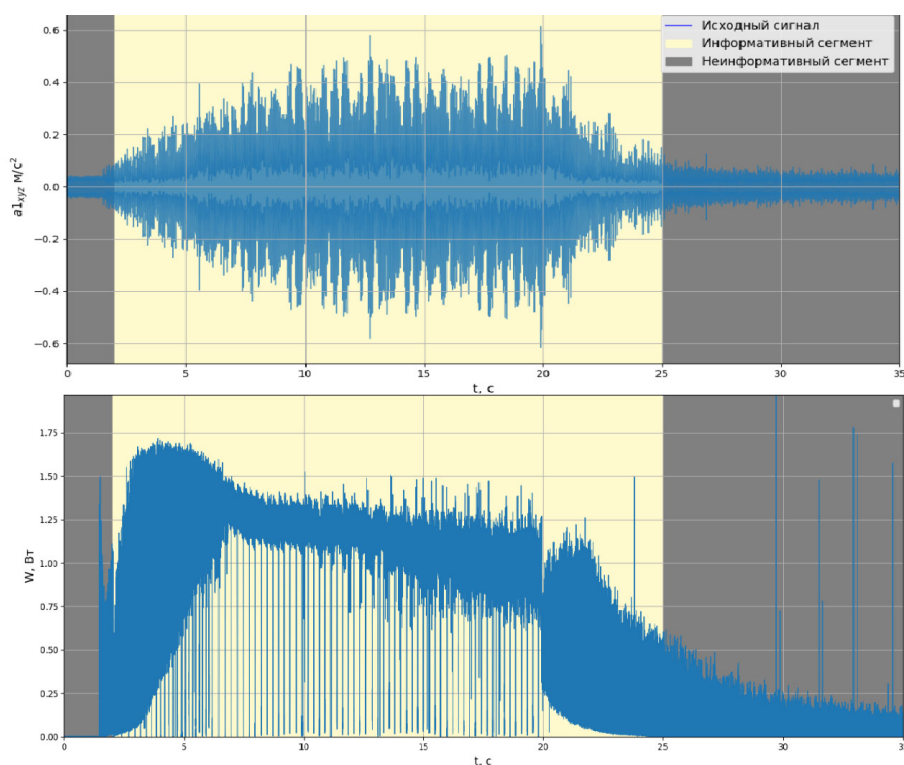


Рис. 5. Сегментация сигнала

На верхнем графике (рис. 5) представлено изменение амплитуды вибрационных сигналов $a_x = a_x(t)$ по оси x , а на нижних – мощности $W = W(t)$ от времени.

Из рис. 5 можно сделать вывод, что при сегментации сигналов выделяются участки с низкой амплитудой колебаний (2-й кластер). Их можно исключить из дальнейшего исследования и рассматривать области с высокой амплитудой колебаний при высокой мощности (1-й кластер).

Таким образом, в ходе исследования была проведена кластеризация спектрограммы методом K -средних, в результате которой сигнал был разделен на два сегмента. Кластер с желтым цветом – это участок с высокоинформативным уровнем сигнала, данный участок может быть использован для выявления неисправностей в механизмах вращения шпинделя.

Список литературы

1. Ge X., P. Smyth, Segmental semi-Markov models for change-point detection with applications to semiconductor manufacturing. Март 2000г, С. 1-11.
2. Isaienkov K., Zadorozniy I. Данные сигналов, «Bearing classification». – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/isaienkov/bearing-classification> (Датаобращения: 28.04.2025)
3. Козлов, А. В. Алгоритм детектирования музыкальных фрагментов в задачах речевой обработки / А. В. Козлов, А. И. Лоханова, К. К. Симончик // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010. – С. 7–11.
4. Канищев, Д. С. Автоматическая сегментация речи методами кластеризации и с применением метода ОЦУ // Вестник ПНИПУ. – 2019. – С. 182–195.

Методы и алгоритмы извлечения полезной информации из слабоструктурированных данных с использованием искусственного интеллекта

К. Д. Лужбин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В статье представлена динамика показателей, полученная при использовании языковых моделей на различных платформах ИИ и официальных статистических данных. Результаты платформ сравниваются с реальной статистикой с использованием относительных ошибок. Оценка эффективности платформы ИИ определяется нахождением средней относительной ошибки. Таким образом, определяется лучшая из них. Точность определялась при определении следующих групп показателей: ДТП, онкологии и демографии. Но основе общей смертности была проведена оценка смертности с применением двух подходов: прямого и косвенного анализа данных. Лучшими платформами оказались ChadAI и Anthropic (ДТП и онкология) и DeepSeek (демография), а в случае косвенного анализа данные платформ и статистики более согласованы.

Ключевые слова: большая языковая модель, эффективность платформы ИИ, официальные данные, средняя относительная ошибка, динамика показателей, оценка потерь от COVID.

Введение

Обработка данных используется в самых разных предметных областях для быстрого и эффективного обнаружения различных закономерностей в данных и извлечения информации, на основе которой можно принимать взвешенные решения [1, 2]. Для обработки могут использоваться различные данные: например, изображения, видео, таблицы или простой текст. Основным источником являются печатные тексты – информация, которая хранится в сети Интернет.

Современные языковые модели для поиска информации оснащены RAG (Retrieval-Augmented Generation)-системами [3]. Таким образом, аналитические системы способны генерировать подробный ответ и ссылаться на найденные источники. Такой способ обработки информации называется генерацией, дополненной поиском RAG-системой.

RAG-система работает следующим образом: сначала происходит извлечение документов, релевантных запросу пользователя, после чего поставляется информация со ссылками на источники [4, 5].

В данной статье приведены результаты работы следующих платформ искусственного интеллекта (далее ИИ): DeepSeek, PerplexityAI, Anthropic

и ChadAI. Их показатели сравниваются с официальными данными сайтов ЕМИСС и Росстат [6–8].

1. Результаты применения платформ ИИ

Для визуализации показателей приведем результаты работы моделей по нахождению статистики дорожно-транспортных происшествий (ДТП) (рис. 1), заболеваемости (рис. 2) и рождаемости (рис. 3). На приведенных графиках зависимости, полученные по всем платформам ИИ, практически совпадают.

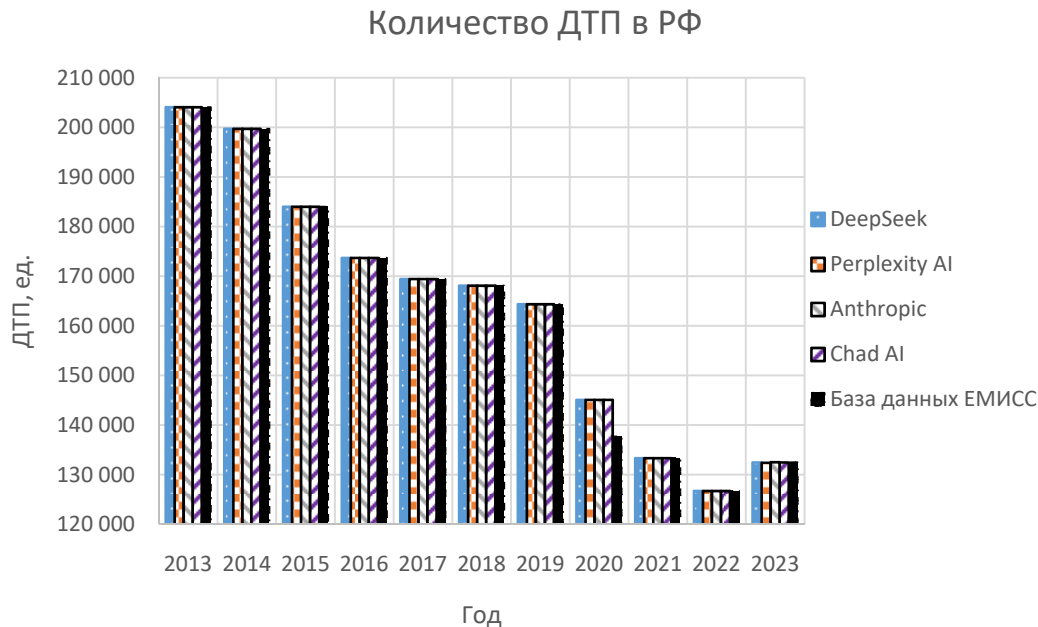


Рис. 1. Данные о ДТП в сравнении с официальной статистикой

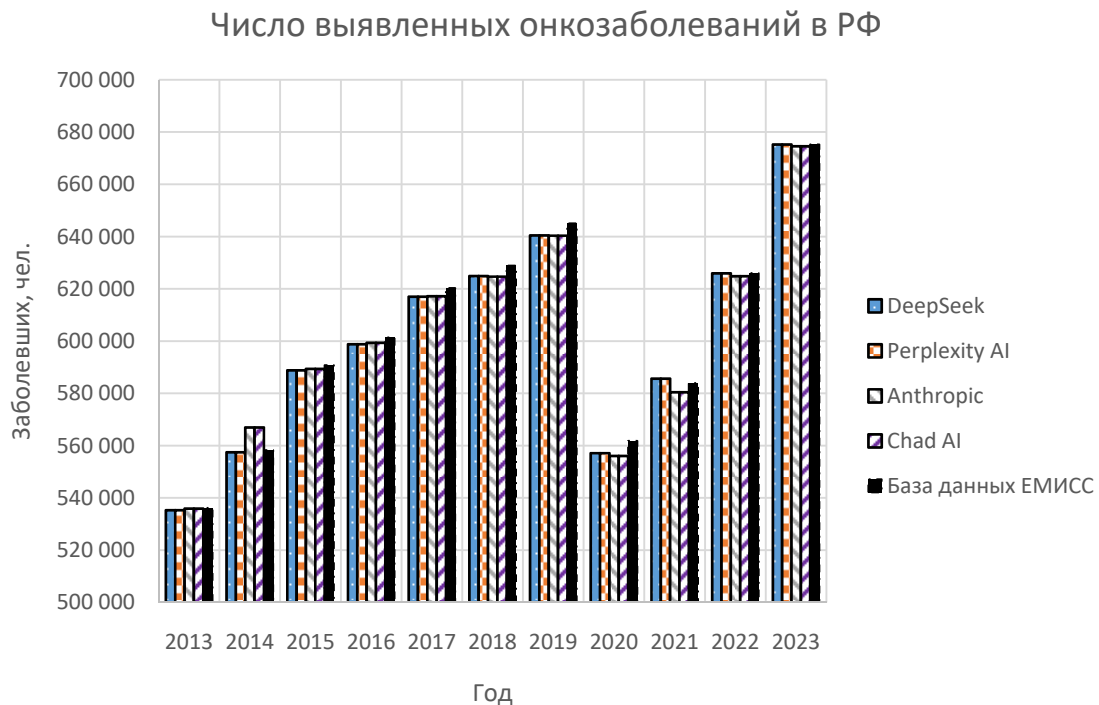


Рис. 2. Данные о заболеваемости в сравнении с официальной статистикой

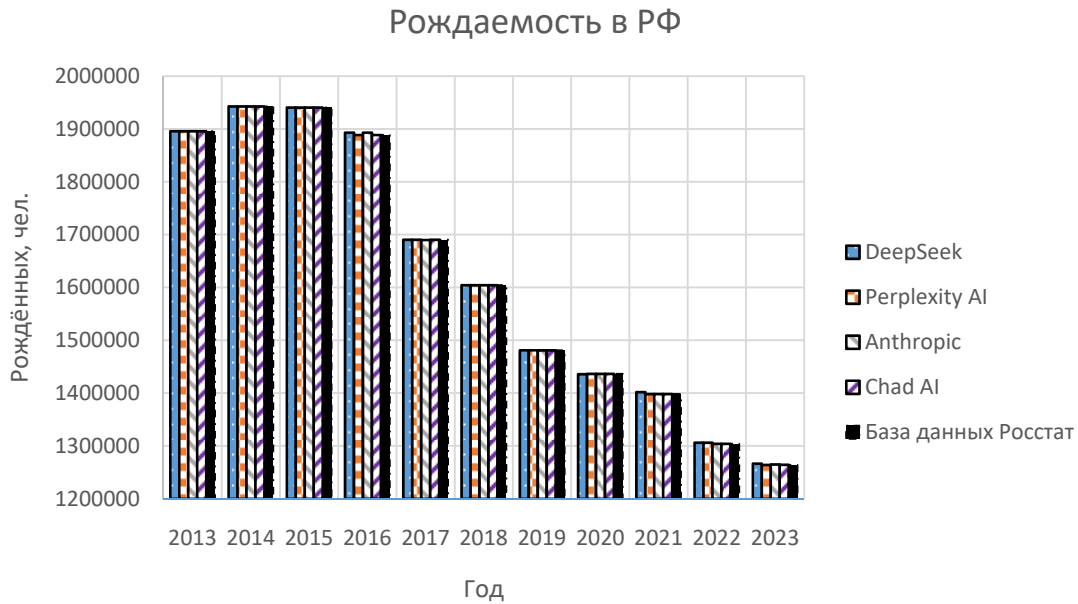


Рис. 3. Данные о рождаемости в сравнении с официальной статистикой

2. Алгоритм сравнения эффективности платформ ИИ

Определим точность найденных платформами данных по территориям РФ, ПФО и УР, взятых вместе.

Шаг 1. Определяем данные платформы y и официальные данные \hat{y} .

Шаг 2. Находим погрешность определения платформой искомых показателей по формуле

$$\sigma_{i,k,r,j} = \frac{|y_{i,k,r,j} - \hat{y}_{i,r,j}|}{\hat{y}_{i,r,j}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где $y_{i,k,r,j}$ – значение показателя j за конкретный год i на территории r по k -й платформе ИИ, $\hat{y}_{i,r,j}$ – значение по тем же критериям по официальным статистическим данным, N – размер выборки.

Шаг 3. Находим среднюю погрешность выборки по формуле

$$\bar{\sigma}_{k,r,j} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{i,k,r,j}}{N}. \quad (2)$$

Шаг 4. Если есть непроверенные платформы, переходим к шагу 1, иначе – к шагу 5.

Шаг 5. Определяем эффективность платформ по средней ошибке.

3. Определение эффективности платформ ИИ

Для примера нахождения точности платформы ИИ сравним ее данные со статистикой ЕМИСС по территории РФ.

Таблица 1. Сравнение данных DeepSeek и ЕМИСС по онкологиям

Год	DeepSeek		Данные ЕМИСС	
	Заболеваемость, чел.	Смертность, чел.	Заболеваемость, чел.	Смертность, чел.
2013	535 287	288 320	536150	288751
2014	557 471	286 601	558242	287302
2015	588 828	296 191	590791	297157
2016	598 811	295 463	601387	296764
2017	617 019	290 585	620279	292120
2018	624 917	293 805	628877	295594
2019	640 463	294 427	645029	296568
2020	557 131	292 030	561801	294439
2021	585 652	281 515	583925	282083
2022	625 973	277 381	625988	277425
2023	675269	261702	675269	284547

По формуле (1) находим относительные погрешности показателей заболеваемости и смертности от заболеваний по территории РФ. Аналогично поступаем и для ПФО и УР.

Таблица 2. Средняя ошибка данных DeepSeek при определении показателей онкологии (З – заболеваемость, С – смертность)

Год	РФ		ПФО		УР	
	З	С	З	С	З	С
2013	0,16	0,15	0,01	0,02	0,57	0,04
2014	0,14	0,24	0,04	0,00	0,82	0,04
2015	0,33	0,33	0,02	0,00	1,58	0,00
2016	0,43	0,44	0,03	0,00	1,37	0,04
2017	0,53	0,53	0,65	0,01	1,54	0,04
2018	0,63	0,61	0,05	0,01	1,82	0,18
2019	0,71	0,72	0,23	0,16	2,44	0,51
2020	0,83	0,82	0,06	0,02	5,45	0,24
2021	0,30	0,20	0,09	0,02	2,84	2,46
2022	0,00	0,02	0,09	0,08	5,37	2,60
2023	0,00	8,03	0,26	6,49	1,52	8,61
Средняя ошибка	0,37	1,10	0,14	0,62	2,30	1,34
Среднее арифм.	0,98					

Аналогичным образом проделаны действия и для других платформ искусственного интеллекта.

Так, были определены средние ошибки платформ ИИ при определении показателей из следующих областей: ДТП, онкология и демография.

Таблица 3. Средняя ошибка платформ ИИ при определении показателей ДТП

Платформа ИИ		DeepSeek	Perplexity AI	Anthropic	Chad AI
РФ	ДТП, %	0,49	0,49	0,00	0,00
	Погибшие, %	0,21	0,21	0,00	0,00
	Пострадавшие, %	0,41	0,41	0,00	0,00
ПФО	ДТП, %	0,67	0,67	0,01	0,01
	Погибшие, %	0,41	0,41	0,01	0,01
	Пострадавшие, %	0,60	0,60	0,01	0,01
УР	ДТП, %	0,64	0,64	0,01	0,01
	Погибшие, %	0,31	0,31	0,00	0,00
	Пострадавшие, %	0,50	0,50	0,01	0,01
Среднее арифметическое		0,47	0,47	0,01	0,01
Место		2	2	1	1

Таблица 4. Средняя ошибка платформ ИИ при определении показателей онкологии

Платформа ИИ		DeepSeek	Perplexity AI	Anthropic	Chad AI
РФ	Заболевших, %	0,37	0,37	0,54	0,54
	Смертей, %	1,10	1,10	1,19	1,19
ПФО	Заболевших, %	0,14	0,14	0,18	0,18
	Смертей, %	0,62	0,62	0,73	0,73
УР	Заболевших, %	2,30	2,23	1,27	1,27
	Смертей, %	1,34	1,06	1,32	1,32
Среднее арифметическое		0,98	0,92	0,87	0,87
Место		3	2	1	1

Таблица 5. Средняя ошибка платформ ИИ при определении показателей демографии

Платформа ИИ		DeepSeek	Perplexity AI	Anthropic	Chad AI
РФ	Родившихся, %	0,08	0,02	0,03	0,00
	Смертей, %	2,19	0,28	0,29	0,27
ПФО	Родившихся, %	3,44	2,96	13,93	7,90
	Смертей, %	4,28	3,92	5,08	2,99
УР	Родившихся, %	0,25	0,58	10,27	0,89
	Смертей, %	0,13	6,29	6,58	5,84
Среднее арифметическое		1,73	2,34	6,03	2,98
Место		1	2	4	3

Таблица 6. Лучшие модели для поиска

Предметная область	Лучшая (-ие) платформа (-ы) ИИ
ДТП	Chad AI и Anthropic
Онкология	Chad AI и Anthropic
Демография	DeepSeek

4. Оценка смертности от COVID-19

На основе данных об общей смертности была проведена оценка потерь от COVID-19 с применением двух подходов. На рис. 4, 5 представлены потери, полученные при непосредственном запросе к платформам ИИ.

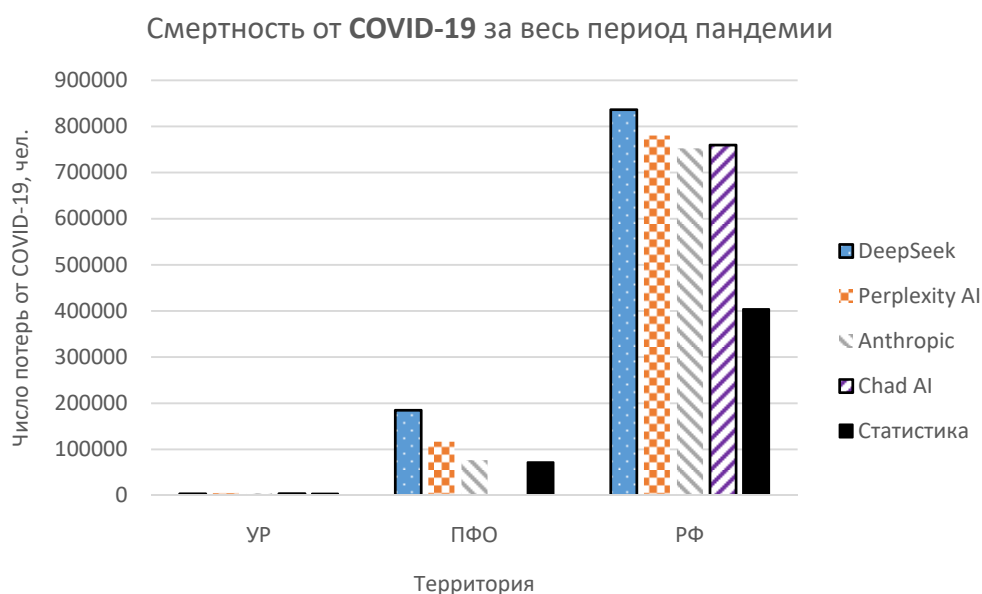


Рис. 4. Суммарные потери за период пандемии от COVID-19 (прямой анализ данных)

Можно заметить большую несогласованность данных платформ ИИ и статистики, причем статистика показывает заниженные данные. Это может быть связано со следующими причинами: люди умирают дома без результатов тестирования, COVID-19 не всегда указывается как основная причина смерти. Из-за сильной несогласованности необходимо использовать другой подход, дающий оценку смертности от COVID-19. Будем называть его «косвенный анализ данных».

Смысл второго подхода – на основе общей смертности допандемийного периода построить регрессионную модель и провести экстраполяцию на период с 2020 по 2024 год. Разница между данными статистики и значениями экстраполяции будет означать число потерь от COVID-19.

Были проверены четыре регрессионные модели для отбора наилучшей: линейная (3), квадратическая (4), логарифмическая (5) и экспоненциальная (6).

$$\hat{Y} = a \cdot X + b, \quad (3)$$

$$\hat{Y} = a \cdot X^2 + b \cdot X + c, \quad (4)$$

$$\hat{Y} = a \cdot \ln(X) + b, \quad (5)$$

$$\hat{Y} = a \cdot e^x + b. \quad (6)$$

В ходе исследования было выяснено, что линейная регрессия дает более вменяемые результаты экстраполяции, а также неплохо описывает общую смертность в допандемийный период. Результаты применения второго подхода с применением регрессионного моделирования представлены на рис. 5.

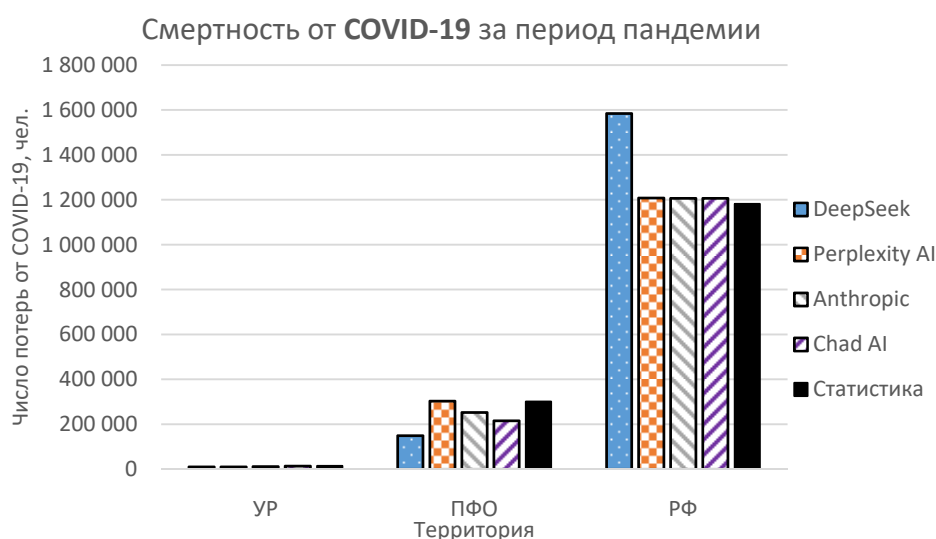


Рис. 5. Суммарные потери за период пандемии от COVID-19 (косвенный анализ данных)

На основе двух использованных подходов можно сделать вывод, что данные статистики и платформ ИИ, полученные с помощью вычета общей и прогнозной смертности, более согласованы между собой. Кроме того, подход с косвенным анализом позволяет учесть незарегистрированные случаи смертности. Следовательно, данная методика показывает более точное число потерь от COVID-19.

Заключение

В работе рассмотрены методы оценки эффективности поисковых платформ и подходы к оценке смертности от COVID-19. Так, ChadAI и Anthropic лучше себя проявляют при нахождении данных по ДТП и онкологии (обе платформы разделили первое место), а DeepSeek – при определении демографических данных. Из двух подходов оценка смертности, полученная через косвенный анализ данных, является более вменяемой.

Список литературы

1. Макарова, Е. А. Обработка слабоструктурированных текстовых данных для использования в моделях анализа // Information and mathematical technologies in science and management. – 2023. – № 1 (29). – С. 178–189.

2. Алисултанова, Э. Д. Методы интеллектуального анализа данных в образовании / Э. Д. Алисултанова, Л. К. Хаджиева, З. А. Шудуева // Вестник ГГНТУ. Гуманитарные и социально-экономические науки. – 2022. – Т. XVIII, № 2 (28). – С. 47–54.
3. Генерация, дополненная поиском // Википедия. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Генерация,_дополненная_поиском (дата обращения 18.05.2025).
4. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и анализ данных / Е. И. Большакова [и др.]. – Москва : НИУ ВШЭ, 2017. – 269 с.
5. Хобсон, Л. Обработка естественного языка в действии / Л. Хобсон, Х. Ханнес, Х. Коул. – Санкт-Петербург : Питер, 2020. – 576 с.
6. Официальные статистические показатели // ЕМИСС. – URL: <https://fedstat.ru> (дата обращения: 24.05.2025).
7. Федеральная служба государственной статистики // Росстат. – URL: <https://rosstat.gov.ru/?ref=website-popularity> (дата обращения: 24.05.2025).
8. Ясницкий, Л. Н. Искусственный интеллект. – Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 197 с.

Создание автономной интеллектуальной системы наведения и корректировки стрельбы по данным цифровых снимков

Е. Ю. Львова, Д. Г. Нефедов

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе представлены результаты исследования автономной интеллектуальной системы наведения и корректировки стрельбы на основе анализа цифровых изображений. Целью исследования является создание программно-алгоритмического комплекса, обеспечивающего автоматическое определение координат цели и точек падения снарядов, а также реализацию высокоточной корректировки огня. В ходе работы была рассмотрена предобученная модель YOLOv8 для решения задачи идентификации целей и точек падения снарядов. Сформулированы алгоритмы автономного наведения и баллистической корректировки, учитывающие координатную информацию, извлеченную из цифровых снимков. Разработано программное обеспечение, включающее модули внешней баллистики, обработки координат, наведения и визуализации результатов. Результаты исследования ориентированы на практическое применение в автоматизированных системах управления огнем с перспективой повышения автономности и точности огневых комплексов.

Ключевые слова: внешняя баллистика, прямая и обратная задача, нейронная сеть, интеллектуальная система, наведение и корректировка стрельбы, программный комплекс.

Введение

Одной из актуальных задач при создании современных вооруженных систем является внедрение высокоэффективных алгоритмов автономного наведения и корректировки огня. В условиях использования неуправляемых боеприпасов отсутствует возможность внешнего управления их траекторией, что делает решающим фактором точности поражения цели корректное определение углов наведения на основе заранее известных параметров. Для этого требуется решение обратной задачи внешней баллистики, сопряженной с высокой вычислительной сложностью и значительными временными затратами.

Целью исследования является создание автономной интеллектуальной системы, которая позволит выполнять автоматическое наведение и корректировку стрельбы артиллерийских установок по цифровым снимкам местности без участия оператора. Реализация такой системы предусматривает разработку алгоритмов обработки изображений, распознавания целей и определения координат точек прицеливания с последующей передачей управляющих сигналов исполнительным механизмам.

1. Математическая постановка задачи наведения и корректировки стрельбы

Математическая модель прямой задачи внешней баллистики представляет собой систему дифференциальных уравнений, описывающих движения снаряда по траектории [1]. Наличие численного алгоритма для решения данной системы позволяет сформировать базу данных вычислительных экспериментов при варьировании широкого спектра параметров стрельбы. Применение методов интеллектуального анализа данных позволяет выявлять сложные нелинейные взаимосвязи между входными и выходными параметрами баллистических расчетов.

Прямую задачу внешней баллистики представим в виде преобразования:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{P}_k, \tau_k) = \Phi_1(\mathbf{P}_0, V_0, \alpha_c, \theta_c, \mathbf{A}), \quad (1)$$

где $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k, z_k)$ – конечная точка стрельбы (координаты падения снаряда); τ_k – время полета снаряда, $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – начальная точка стрельбы (координаты орудия); V_0 – начальная скорость; α_c – дирекционный угол цели; θ_c – угол стрельбы. Вектор \mathbf{A} содержит характеристики снаряда и орудия, геофизические и атмосферные данные.

Обратная задача заключается в нахождении обратного преобразования [2]

$$\mathbf{q} = (\alpha_c, \theta_c) = \Phi_2(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_c, V_0, \mathbf{A}), \quad (2)$$

где $\mathbf{P}_c = (x_c, y_c, z_c)$ – координаты цели.

Поскольку на траекторию полета снаряда оказывают влияние ряд факторов, которые могут быть частично неизвестны или заданы с ограниченной точностью, решение обратной задачи может не обеспечивать точного совпадения точки падения с координатами цели. Погрешность $\Delta\mathbf{P}_c = (\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c)$ определяется между рассчитанной точкой падения снаряда и положением цели:

$$\Delta\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_k - \mathbf{P}_c.$$

Для повышения точности наведения на цель решается задача корректировки стрельбы. Представим решение задачи корректировки стрельбы в виде преобразования

$$\mathbf{b} = (\Delta\alpha_c, \Delta\theta_c) = \Phi_2(\Delta\mathbf{P}_c, D, \mathbf{A}), \quad (3)$$

где $\Delta\alpha_c, \Delta\theta_c$ – поправки к углам наведения на цель; D – дальность стрельбы,

$$D = \sqrt{(x_c - x_0)^2 + (y_c - y_0)^2}.$$

Процесс стрельбы из баллистических установок сопровождается неизбежным рассеиванием снарядов. Это обусловлено наличием погрешностей параметров снаряда (массы и формы), начальных условий (скорости и углов наведения) и других возмущающих факторов (биения, вибрации, турбулентность атмосферы). Область рассеивания снарядов представляет собой эллипс, размеры которого определяются эмпирически по результатам статистической

обработки серий выстрелов. Размеры эллипса рассеивания увеличиваются с увеличением дальности стрельбы. Поэтому при увеличении дальности стрельбы размер эллипса возрастает, вследствие чего вероятность поражения цели определяется как функция количества выстрелов и параметров рассеивания.

2. Нейросетевая модель идентификации целей

В рамках создания интеллектуальной системы идентификации целей и точек падения снарядов по цифровым изображениям была разработана нейросетевая модель на основе YOLOv8n, выбранной за высокую скорость обработки и пригодность для встраиваемых систем с ограниченными ресурсами. YOLOv8n, как одношаговый детектор объектов, выполняет идентификацию и регрессию координат в едином процессе, что обеспечивает минимальное время обработки изображений при сохранении высокой точности, делая ее оптимальной для задач реального времени, таких как наведение и корректировка стрельбы [3].

Архитектура YOLOv8n состоит из трех основных компонентов: backbone, neck и head. Backbone, основанный на модифицированном CSPDarknet, отвечает за извлечение признаков из входного изображения. Он использует сверточные слои, нормализацию (Batch Normalization) и активацию (SiLU), а также перекрестные соединения (Cross Stage Partial), которые обеспечивают эффективное сохранение контекстной информации и стабильность градиентов на глубине модели. Это позволяет модели выделять как низкоуровневые, так и высокоуровневые признаки, необходимые для идентификации объектов различного масштаба. Neck объединяет признаки с разных уровней разрешения через Feature Pyramid Network (FPN) и Path Aggregation Network (PAN). FPN формирует пирамиду признаков, усиливая способность модели детектировать мелкие и крупные объекты, а PAN агрегирует информацию по различным масштабам, улучшая пространственную связность признаков. Head реализует anchor-free подход, предсказывая координаты объектов напрямую без необходимости настройки якорей, что упрощает конфигурацию и повышает обобщающую способность модели. Разделенная голова предсказания (decoupled head) разделяет задачи регрессии координат и классификации на независимые слои, что снижает взаимное влияние этих задач и повышает стабильность обучения. Регрессионный слой предсказывает координаты ограничивающих рамок, используя CIoU (Complete Intersection over Union) в качестве функции потерь, которая учитывает пересечение, расстояние между центрами рамок и их угловую ориентацию. Классификационный слой определяет принадлежность объекта к определенному классу, а слой объектности (objectness) оценивает вероятность наличия объекта в рамке, минимизируя ложноположительные срабатывания [4].

На рис. 1 представлена архитектура сверточной нейронной сети (CNN), предназначенной для обработки изображений. На вход (1) подается изображение, которое проходит через чередующиеся сверточные (2, 4, 6) и подвыборочные слои (3, 5). Сверточные слои выделяют локальные признаки с помощью

фильтров, тогда как подвыборочные (обычно max pooling) уменьшают размерность, сохраняя важные характеристики и снижая вычислительные затраты [5].

После извлечения признаков данные передаются на полносвязный слой (7), где происходит интеграция информации и ее преобразование в форму, пригодную для классификации. На выходном слое (8) формируется итоговое предсказание – например, класс объекта. Такая архитектура обеспечивает эффективное распознавание изображений за счет поэтапного усложнения извлекаемых признаков.

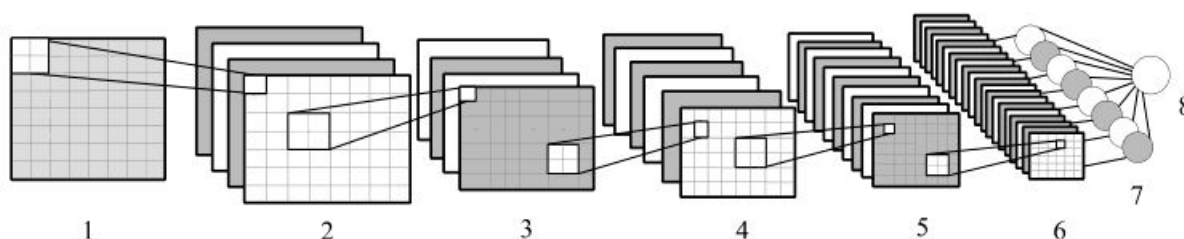


Рис. 1. Архитектура сверточной нейронной сети

Для практической реализации модель YOLOv8n была дообучена на специализированном датасете, содержащем размеченные изображения целей и точек падения снарядов. Датасет подготовлен в формате YOLO, где каждое изображение сопровождалось текстовым файлом с нормализованными координатами ограничивающих рамок и метками классов. Для повышения устойчивости модели и улучшения ее обобщающей способности была реализована система аугментации изображений и аннотаций, включающая отражения, повороты, масштабирование, изменение яркости и контрастности, добавление шума и размытие. Координаты объектов автоматически адаптировались под все преобразования, что обеспечило разнообразие обучающего набора и повысило его реалистичность [6].

В ходе работы были использованы библиотеки ultralytics – для инференса модели YOLOv8, matplotlib.pyplot – для визуализации метрик обучения, pandas – для обработки табличных данных и анализа результатов, а также os – для взаимодействия с файловой системой и управления структурой проекта, tkinter – для построения графического интерфейса пользователя, включая диалоговые окна и таблицы с помощью filedialog и ttk, PIL (в частности, модули Image и ImageTk) – для загрузки и отображения изображений в интерфейсе, а также cv2 из состава OpenCV – для преобразования изображений и нанесения графических аннотаций [7].

Обучение проводилось с использованием предобученных весов yolov8n.pt, обученных на датасете COCO, что ускорило адаптацию модели. Обучение длилось 200 эпох с оптимизатором Adam, размером батча 2 и входным разрешением 640×640 пикселей. Параметры включали сохранение промежуточных результатов (save=True, save_period=-1), воспроизводимость (seed=42, deterministic=True), многопоточность (workers=4) и вывод логов

(verbose=True). Результаты сохранялись в директории `military_vehicles_cpu`. Функция потерь включала компоненты локализации (box loss), классификации (cls loss) и объектности, с CIoU для локализации. Метрики (mAP@0.5, mAP@0.5:0.95, precision, recall) записывались в CSV-файл для анализа сходимости и исключения переобучения.

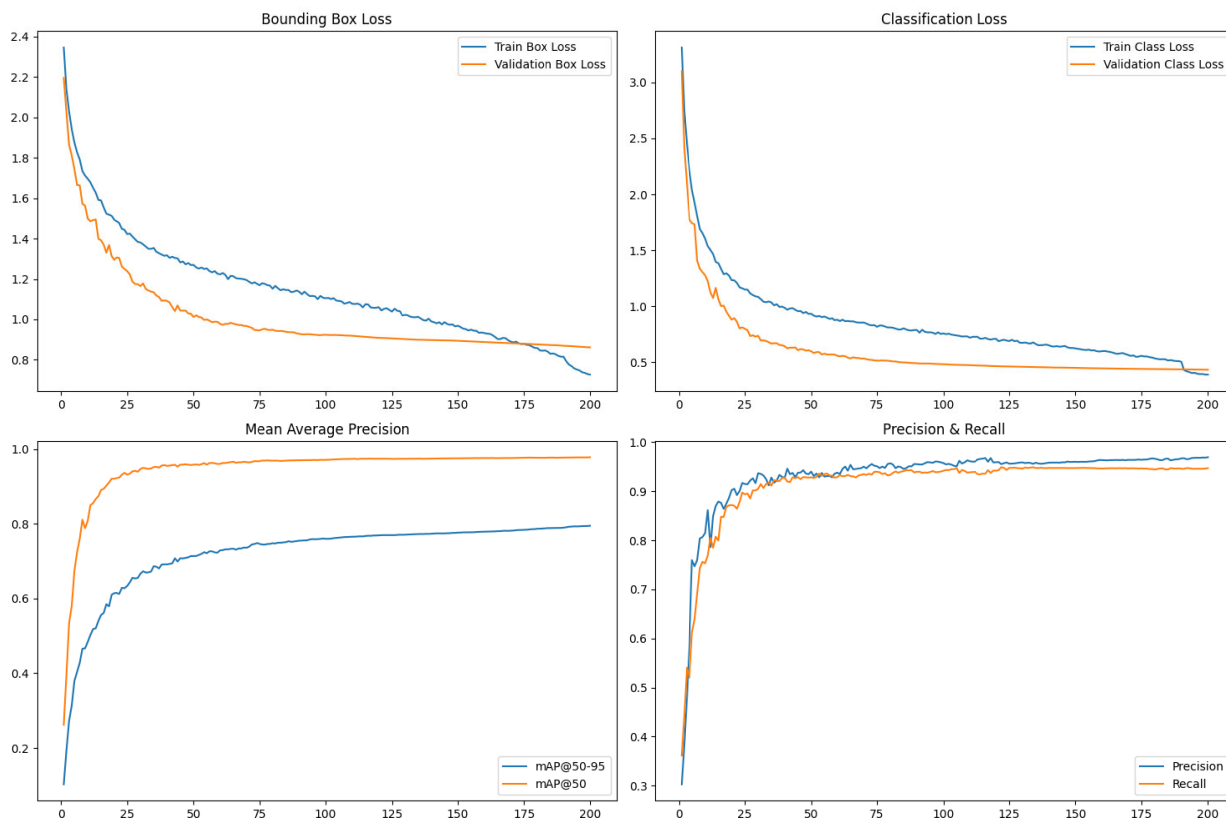


Рис. 2. Динамика потерь и метрик во время обучения

Тестирование проводилось на отложенном наборе с использованием лучшей модели (best.pt). Предсказания на тестовых изображениях сохранялись в директории `runs/detect/predict/`, подтверждая возможность интеграции модели в систему наведения.

3. Результаты работы системы определения цели

На рис. 3 представлена блок-схема, которая иллюстрирует архитектуру автономной интеллектуальной системы наведения и корректировки стрельбы по данным цифровых снимков. Структура состоит из системы наведения и корректировки, модуля решения прямой задачи внешней баллистики и нейросетевых модулей решения обратной задачи и определения цели и координат.

Для выполнения предсказания объектов на цифровых изображениях была разработана и использована специализированная графическая программа. Данное приложение предоставляет интерактивный способ загрузки изображений, запуска инференса и визуализации полученных результатов в графической форме, а также в виде табличных данных.

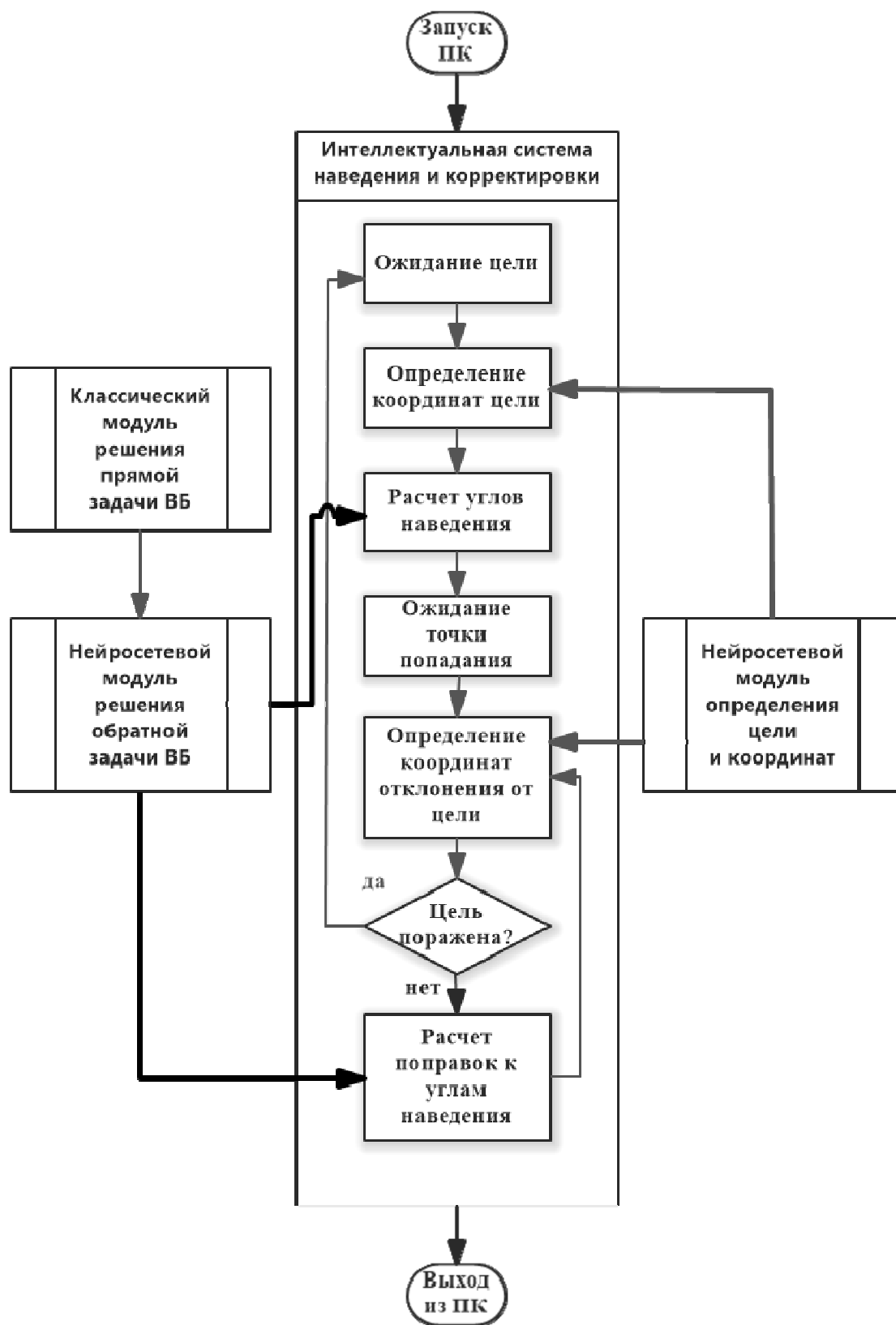


Рис. 3. Блок-схема автономной интеллектуальной системы наведения и корректировки стрельбы по данным цифровых снимков

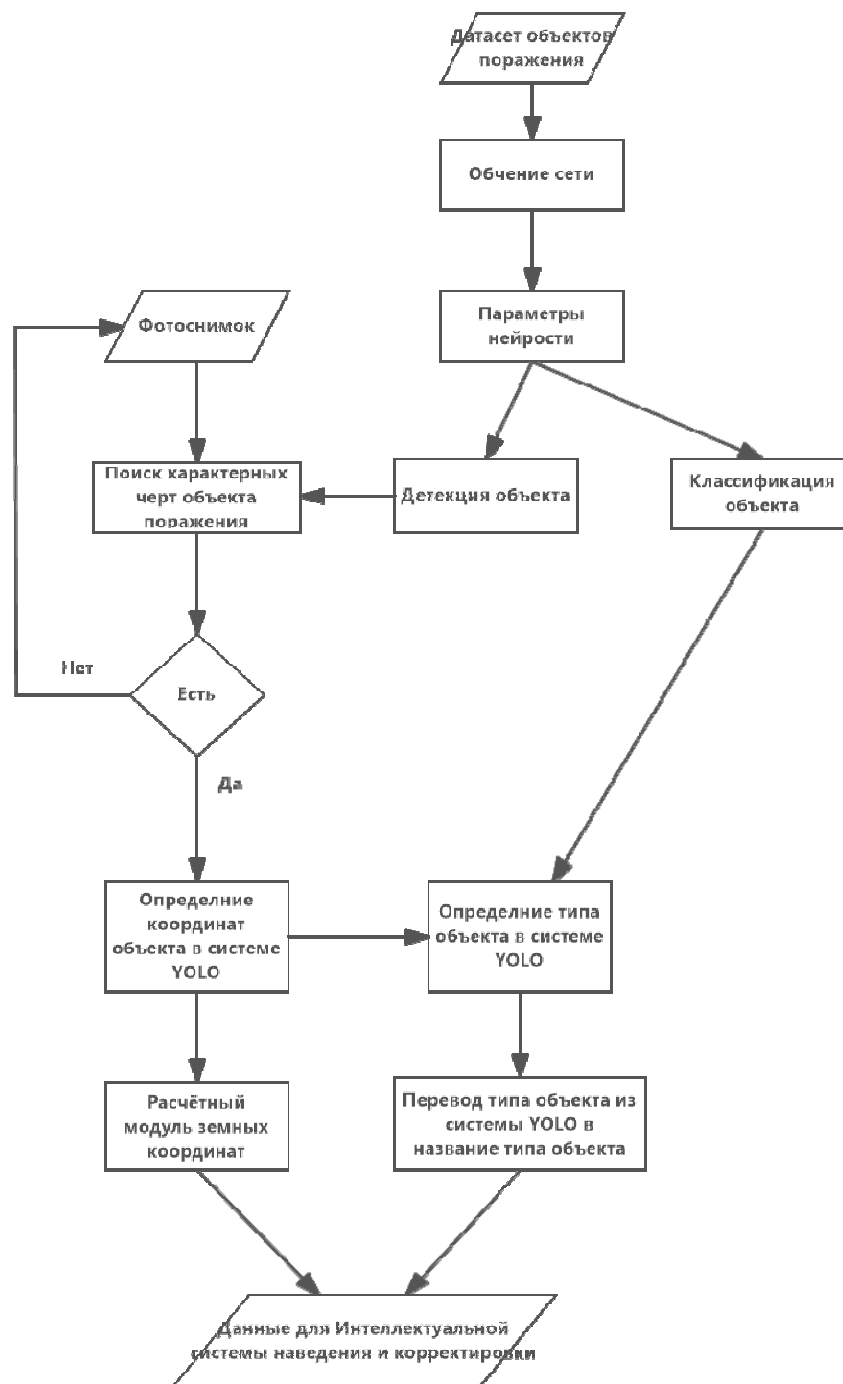


Рис. 4. Блок-схема модуля определения цели и координат

В процессе работы пользователь загружает изображение через диалог выбора файла. После активации процедуры предсказания изображение передается в модель, которая была предварительно загружена из заданного файла (best.pt). Модель выполняет детекцию объектов, предсказывая их классы, координаты в нормализованной форме и уровни уверенности. Обнаруженные объекты отображаются непосредственно на изображении путем наложения графических аннотаций, а также фиксируются в табличной форме с указанием имени исходного файла, идентификатора класса, значения уверенности, а также координат центра, ширины и высоты каждого предсказанного объекта.



Рис. 5. Интерфейс для обнаружения объектов на изображении

Таким образом, использование модели YOLOv8n представляет собой эффективное решение для задачи автоматического обнаружения объектов по цифровым снимкам. Ее архитектурные особенности обеспечивают баланс между точностью и скоростью, делая ее эффективным решением для автономной интеллектуальной системы в динамических условиях.

Заключение

Представленная интеллектуальная система наведения и корректировки стрельбы на основе анализа цифровых изображений направлена на повышение точности и автономности боевого применения артиллерийских средств. Использование нейросетевой модели YOLOv8n позволяет эффективно решать задачи обнаружения целей и точек падения снарядов в реальном времени, что значительно ускоряет процесс принятия решений и снижает зависимость от оператора. Разработанные алгоритмы, основанные на методах машинного обучения и обработке визуальных данных, обеспечивают высокую точность наведения и возможность динамической корректировки стрельбы с учетом внешних условий и характеристик рассеивания.

Список литературы

1. Королев, С. А. Интеллектуальная система автономного наведения и корректировки стрельбы из артиллерийской установки / С. А. Королев, Д. Г. Нефедов, И. Г. Русяк // Интеллектуальные системы в производстве. – 2024. – Т. 22, № 3. – С. 85–91. – DOI: 10.22213/2410-9304-2024-3-85-91.
2. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения / С. А. Королев, А. М. Липанов, И. Г. Русяк, В. А. Тененев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2019. – № 57. – С. 76–83.

3. Алгоритм обнаружения объектов для оптико-электронных систем с обучением в реальном времени / В. А. Бондаренко, П. А. Гессен, В. А. Павлова, М. В. Созинова, В. А. Тупиков // Автоматизация и современные технологии. – 2022. – № 11. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-obnaruzheniya-obektov-dlya-optiko-elektronnyh-sistem> (дата обращения: 28.03.2025).

4. *Щукина, А. А.* Создание программной модели свёрточной нейронной сети для распознавания образов наземных целей // Молодежь и будущее авиации и космонавтики : сб. аннотаций XIII Всерос. межотр. молодеж. конкурса науч.-техн. работ. – Москва : Перо, 2021. – С. 158–159.

5. Le Cun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning // Nature. 2015. Vol. 521. P. 436–444.

6. *Ванник, В. Н.* Алгоритмы обучения распознавания образов. – Москва : Физматлит, 2018. – 400 с.

7. *Жерон, О.* Прикладное машинное обучение с помощью Scikit-Learn и Tensor Flow. – Диалектика, 2018. – 662 с.

Методы кластерного анализа для обработки и классификации сигналов

А. И. Мусина

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В работе рассматриваются методы кластерного анализа для обработки и классификации сигналов двух типов: вибрационные сигналы механизмов вращения шпинделя и гидроакустические сигналы подводных объектов. Основная цель работы заключается в определении зон неисправностей для вибрационных сигналов и классификация гидроакустических сигналов с использованием методов кластеризации. В рамках исследования разработана система, которая включает методы сегментации сигналов, визуализацию результатов Фурье-анализа и классификацию на основе кластерного анализа. В статье представлены математические основы алгоритмов, а также результаты обработки реальных сигналов. Работа демонстрирует эффективность применения кластерного анализа для решения задач обработки сигналов.

Ключевые слова: кластерный анализ, метод k-средних, вибрационные сигналы, гидроакустические сигналы, Фурье-анализ, классификация.

Введение

Современные технологии обработки сигналов требуют эффективных методов работы с большими объемами данных. Кластерный анализ, в частности метод k-средних, является одним из возможных подходов для сегментации и классификации сигналов.

В данной работе исследуется применение этого метода для обработки вибрационных и гидроакустических сигналов. Эти сигналы имеют разную природу, их объединяет общая задача: применение алгоритмов кластерного анализа для классификации и идентификации сигналов. В первом случае требуется найти некоторые зоны, указывающие на наличие неисправностей в механическом устройстве. Для сигналов второго типа решается задача идентификации объектов разных типов по отраженным сигналам. Это имеет большое значение для диагностики механизмов и распознавания подводных объектов.

Цели работы: определить зоны неисправностей вибрационных сигналов и решить задачу классификации для гидроакустических сигналов.

Исходные данные

Исходные данные представлены двумя типами сигналов:

1. Вибрационные сигналы – запись реальных вибраций подшипника, полученных экспериментальным путем, описанных в [1]. Для них требуется выделить зоны неисправностей.

2. Гидроакустические сигналы – запись отраженных сигналов некоторых объектов, полученных из экспериментов, описанных в [2], которые нужно идентифицировать.

Образцы сигналов данных типов представлены на рис. 1, 2.

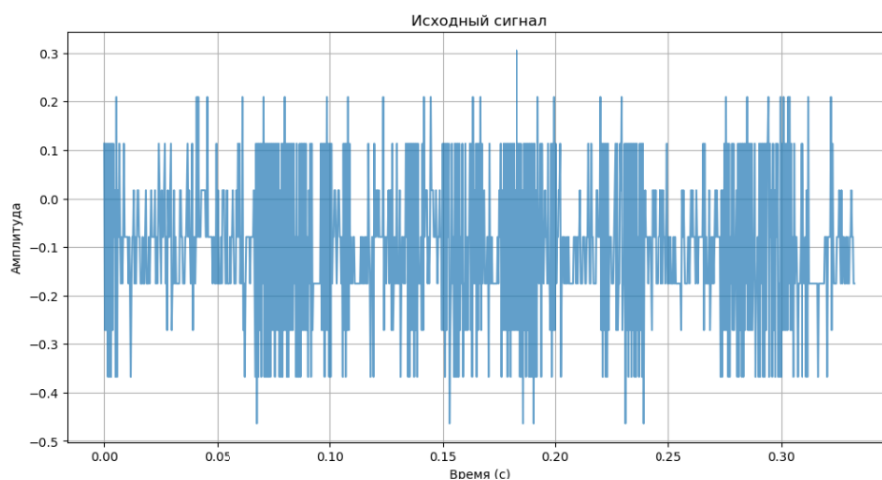


Рис. 1. Вибрационный сигнал

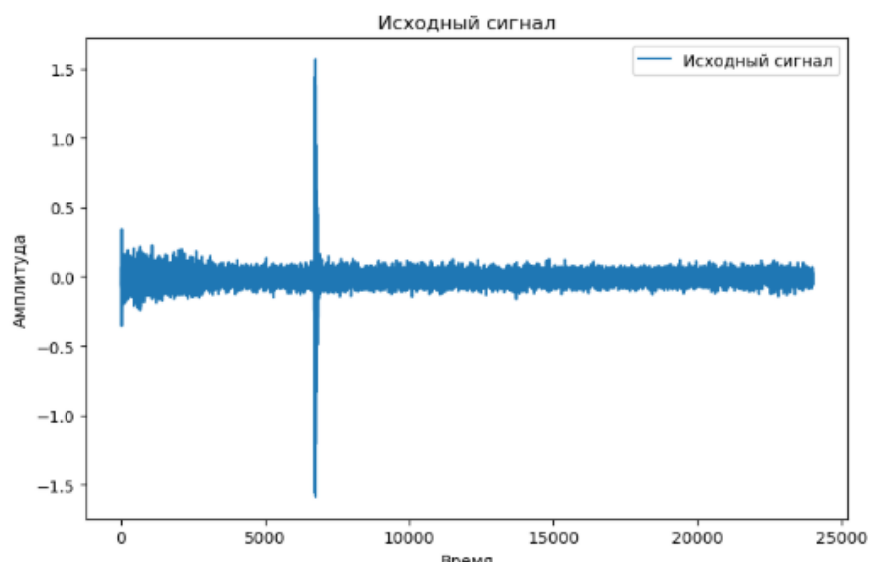


Рис. 2. Гидроакустический сигнал

Определение зон неисправностей в вибрационных сигналах

Для определения зон неисправностей в вибрационных сигналах был разработан алгоритм на языке Python. На первом этапе сигнал делится на сегменты равной длины. Каждый сегмент обрабатывается с помощью кратковременного преобразования Фурье, что позволяет получить набор коэффициентов Фурье [3] из разложения

$$X(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(n+lL)e^{-iw_k n}.$$

Из полученных спектрограмм извлекаются следующие признаки: амплитуда и скорость изменения амплитуды.

Извлеченные признаки формируют пространство признаков, в котором выполняется кластеризация с использованием метода k-средних [4]. Число кластеров равно двум, что соответствует классификации на «нормальные» и «дефектные» сегменты.

Результаты кластерного анализа представлены в виде графика, который визуализирует зоны неисправности вибрационного сигнала (рис. 3):

1. Сегменты, отнесенные к кластеру «нормальный», отображаются синим цветом.
2. Сегменты, принадлежащие кластеру «дефект», отображаются желтым цветом.

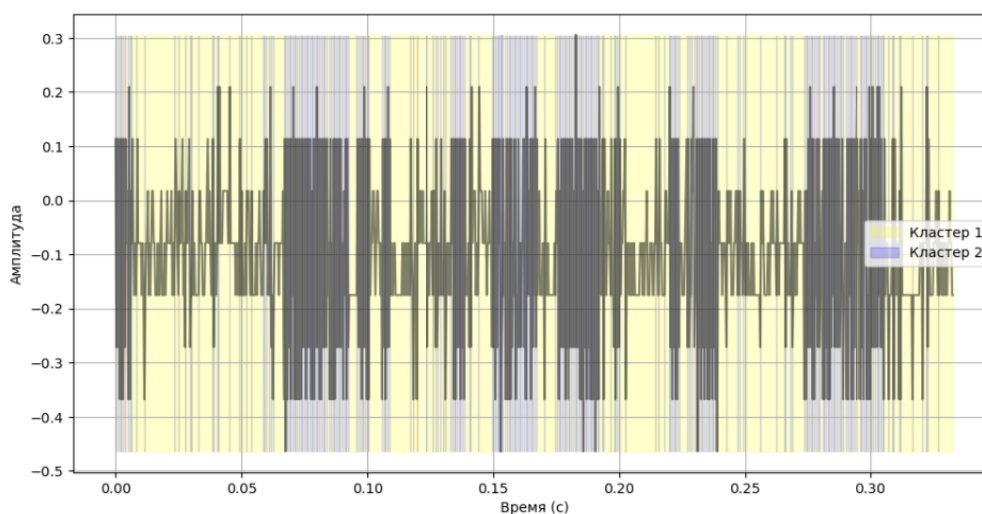


Рис. 3. Сигнал, разделенный на кластеры

Для программной реализации алгоритма использовалась библиотека `scikit-learn` [5], обеспечивающая высокую точность кластеризации.

Классификация гидроакустических сигналов

Для классификации гидросигналов был разработан другой алгоритм на языке `tPython`, который использует методы кластеризации для сравнения объектов по сегментам, которые строятся аналогично механическим сигналам.

Исходные данные описывали 4 объекта: алюминиевая трубка диаметрами 20 и 25 мм и полипропиленовая трубка диаметрами 20 и 25 мм, каждый из которых содержал по 4 гидросигнала.

На первом этапе из каждого сигнала убирался шум и выделялся полезный фрагмент, который разбивался на 10 сегментов равной длины. Для определения длины полезного сигнала использовался алгоритм кластеризации, основанный на быстром преобразовании Фурье.

Затем каждый сегмент полезного сигнала обрабатывался с помощью того же кратковременного преобразования Фурье. Далее первый сегмент первого сигнала сравнивался с первыми сегментами остальных сигналов с помощью метода k-средних. Аналогично сравнивались все сегменты (со второго по десятый). Критерием схожести сегментов служила близость их частотных характеристик, определяемая евклидовым расстоянием в пространстве признаков.

После сравнения всех сегментов подсчитывалось количество совпадающих и несовпадающих сегментов для каждого сигнала относительно первого сигнала. Если количество похожих сегментов превышало установленный порог (5 сегментов), сигнал считался принадлежащим к тому же кластеру, что и эталон. В противном случае сигнал классифицировался как непохожий. Алгоритм кластеризации применялся для попарного сравнения объектов.

Результаты анализа представлены в таблице, где для каждого сигнала, относящегося к объектам: алюминиевая трубка диаметром 20 мм (номер 1) и полипропиленовая трубка диаметром 20 мм (номер 2), указаны его номер, тип (эталон или сравниваемый), а также результат сравнения (похож или не похож), количество совпавших сегментов и принадлежность к объекту. Например, сигналы под номером 2, 3 и 4 показали высокую степень схожести с эталоном (9, 10 и 9 совпавших сегментов соответственно), в то время как сигналы под номерами 5, 6, 7 и 8 были отнесены к другому кластеру.

Результаты анализа

Номер сигнала	Тип	Похожесть	Совпавших сегментов	Объект
1	Эталон	–	–	1
2	Сравниваемый	Да	9	1
3	Сравниваемый	Да	10	1
4	Сравниваемый	Да	9	1
5	Сравниваемый	Нет	4	2
6	Сравниваемый	Нет	5	2
7	Сравниваемый	Нет	1	2
8	Сравниваемый	Нет	4	2

На рис. 4 показано количество похожих сегментов для каждого сигнала. Сигналы, которые превысили установленное значение для похожих сегментов (5 сегментов), были успешно отнесены к кластеру эталона, что подтверждает эффективность предложенного метода.

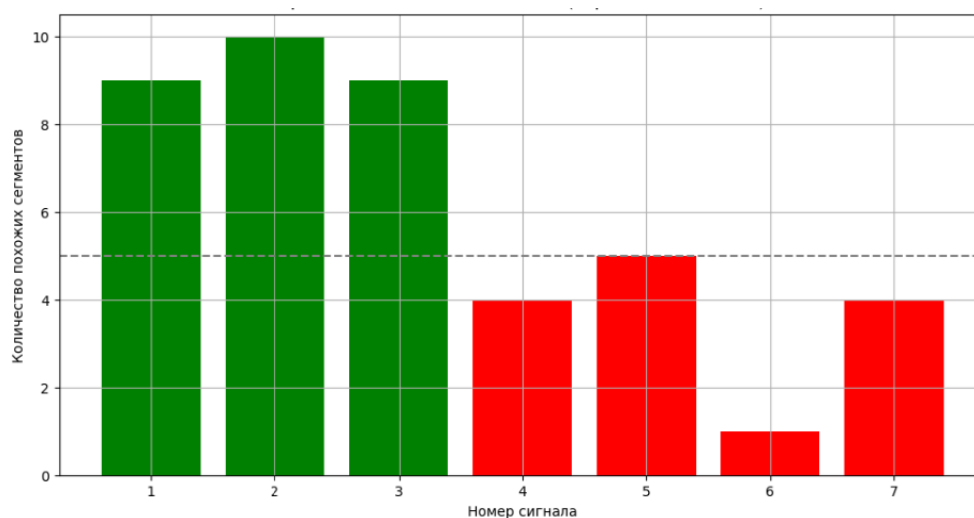


Рис. 4. Количество сегментов

Такой же анализ был проведен для всех других пар объектов. Результаты были также успешными.

Использование кластерного анализа, в частности метода k-средних, позволяет расширить пространство признаков [6] для решения задачи классификации гидросигналов на основе их частотных характеристик. Разработанный алгоритм демонстрирует высокую точность в разделении сигналов на кластеры, что может быть полезно для решения задач распознавания подводных объектов по отраженным гидроакустическим сигналам произвольных подводных объектов.

Заключение

В работе были исследованы методы кластерного анализа для обработки и классификации вибрационных и гидроакустических сигналов. Разработанная информационно-аналитическая система продемонстрировала свою эффективность в решении поставленных задач: определения зон неисправностей в вибрационных сигналах шпинделя и классификации гидроакустических сигналов подводных объектов.

Результаты работы подтверждают, что кластерный анализ является полезным инструментом для обработки сигналов, особенно в задачах, которые требуют автоматизированного выявления аномалий или идентификации объектов.

Список литературы

1. Isaienkov K., Zadorozniy I. Данные сигналов. «Bearing classification». – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/isaienkov/bearing-classification>.
2. Различение подводных объектов на основе периодограммного анализа отраженных гидроакустических сигналов / А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков, В. Н. Милич, В. А. Широков // Химическая физика и мезоскопия. – 2022. – Т. 24, вып. 3. – С. 388–399.
3. Ту, Дж. Принципы распознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес; пер. с англ. – Москва : Мир, 1978. – С. 289–290.
4. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. – New-York: Springer, 2009. – С. 509–511.
5. KMeans – scikit-learn 1.6.1 documentation. – URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html>.
6. Метод распознавания подводных объектов по отраженным гидроакустическим сигналам / А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков, В. Н. Милич, В. А. Широков // Химическая физика и мезоскопия. – 2025. – Т. 27, вып. 3. – С. 62–74.

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния осесимметричного твердого тела с неоднородной структурой материала

Е. А. Перескокова

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Современное пушечное вооружение испытывает высокие нагрузки: тепловые и механические для решения этого используется биметаллические стволы и термо-механическая обработка. Структура материала также меняется, внутри становится более прочной, поэтому для исследования процессов необходимо моделировать процессы НДС с учетом неоднородности. В докладе рассмотрен принцип действия метода конечных элементов, его основные этапы, а также области применения, преимущества и недостатки. МКЭ позволяет инженерам и исследователям моделировать поведение материалов и конструкций под воздействием различных нагрузок, что способствует более глубокому пониманию процессов, происходящих в исследуемых системах. Все результаты сравнивались с расчетами в ANSYS.

Ключевые слова: математическое моделирование, осесимметричное тело, механическое воздействие, тепловое воздействие, состояние.

Введение

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния осесимметричных твердых тел с неоднородной структурой материала представляет собой актуальную задачу в области механики деформируемого твердого тела. В современных условиях, когда требования к прочности и надежности конструкций становятся все более строгими, необходимость в точных и эффективных методах анализа механических процессов возрастает. Осесимметричные тела, такие как стволы артиллерийских орудий, являются важными объектами исследования, поскольку они подвергаются сложным нагрузкам, включая как механические, так и тепловые воздействия.

Физические основы процессов механики деформируемого твердого тела охватывают широкий спектр явлений, связанных с поведением материалов под воздействием внешних сил. Эти процессы описываются уравнениями механики, которые учитывают как упругие, так и пластические деформации, а также тепловые эффекты. Важным аспектом является неоднородность структуры материалов, которая может значительно влиять на их механические свойства и, следовательно, на поведение конструкций в целом.

Метод конечных элементов зарекомендовал себя как один из наиболее эффективных инструментов для численного моделирования физических процессов в МДТТ. Он позволяет решать сложные задачи, связанные с анализом НДС, учитывая геометрические и физические особенности материалов.

В рамках данного исследования будет проведен анализ применения МКЭ в программном обеспечении ANSYS, которое предоставляет мощные инструменты для моделирования и анализа механических и тепловых процессов.

Сбор данных о свойствах материалов, таких как плотность, теплопроводность, теплоемкость и коэффициент теплового расширения, является необходимым этапом для точного моделирования. Эти параметры влияют на результаты анализа и должны быть тщательно подобраны в зависимости от конкретных условий эксплуатации.

В рамках данной статьи будет разработан программный комплекс для моделирования НДС и теплопередачи в осесимметричной постановке. Верификация методов решения задач будет проведена на модельных задачах с известными аналитическими решениями, а также путем сравнения с результатами, полученными в ANSYS. Особое внимание будет уделено исследованию сходимости разработанных методов, что позволит оценить их эффективность и надежность.

Постановка задачи

Математическая модель в осесимметричной постановке представлена на рис. 1.

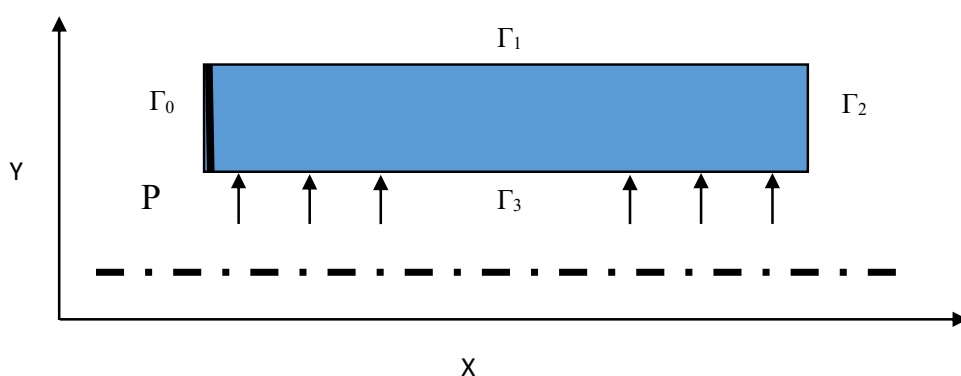


Рис. 1. Математическая модель

$$\Gamma_0 : v = 0.$$

Γ_1, Γ_2 – свободные Г.У.

$$\Gamma_3 : \sigma = P.$$

В линейной теории упругости связь между напряжениями и деформациями принимается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda e + 2G \frac{v}{y}, & e_{\theta\theta} &= \frac{v}{y}, \\ \sigma_{xx} &= \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_{xx} &= \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, & 2e_{yx} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Уравнение равновесия в перемещениях:

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\nu}{y^2} = 0,$$

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} = 0,$$

где u, v – перемещения, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $e = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu}{y} + \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ –

постоянная Ламе, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга [3].

Параметры материала: $E = 210$ ГПа – модуль Юнга, $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона.

Численное моделирование напряженно-деформированного состояния с использованием МКЭ

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину, например перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей [6].

Алгоритм МКЭ можно описать следующим образом:

1. Область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество элементов. В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Формула для аппроксимации:

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i,$$

где N – функции формы, а u – значения переменной в узлах.

2. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Условие равенства:

$$N_i(u_i) = N_j(u_j).$$

3. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов. Система уравнений:

$$K\{u\} = \{F\},$$

где K – глобальная матрица жесткости, составленная из матриц жесткости элементов k , $\{u\}$ – вектор перемещений, $\{F\}$ – вектор внешних сил.

Матрица жесткости элементов рассчитывается:

$$k = \frac{A}{2} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (B^T \cdot B).$$

Глобальная матрица жесткости:

$$K = \sum_{e=1}^m k_e.$$

4. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрешенный вид, что существенно упрощает ее решение. Вычисление перемещений:

$$\{u_{\text{free}}\} = K_{\text{reduced}}^{-1} \{F_{\text{reduced}}\},$$

где K_{reduced} и F_{reduced} – матрицы и векторы, полученные после удаления фиксированных узлов.

Визуализация перемещений:

$$x' = x + u, \quad y' = y + v,$$

т. е. добавляем вычисленные перемещения к исходным координатам узлов.

По вычисленным таким образом перемещениям определяются напряжения. Вычисление напряжения:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (B \cdot \{u\}),$$

где σ – вектор напряжений, а B – матрица деформации [4].

Алгоритм МКЭ реализован на языке Python. Для получения сетки была применена библиотечка GMSH, которая может создавать сложные геометрические модели и автоматически генерировать различные виды сеток. Для триангуляции используется алгоритм Делоне. Триангуляцией Делоне называется такая триангуляция, в которой для любого треугольника верно, что внутри описанной около него окружности не находится точек из исходного множества. Используется библиотека NumPy для работы с многомерными массивами, удобна для хранения и обработки узлов. Для визуализации данных требуется библиотека matplotlib.pyplot, она строит графики перемещений и необходимые зависимости.

На рис. 2 представлена модель с треугольной сеткой для тела с неоднородной структурой материала. На рис. 3 модель с однородной структурой материала.

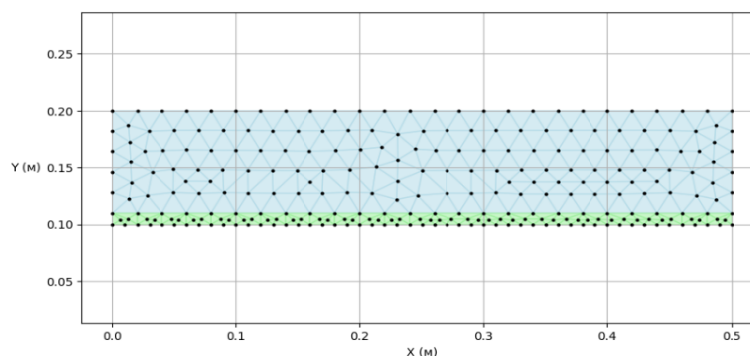


Рис. 2. Триангуляция тела с неоднородной структурой материала

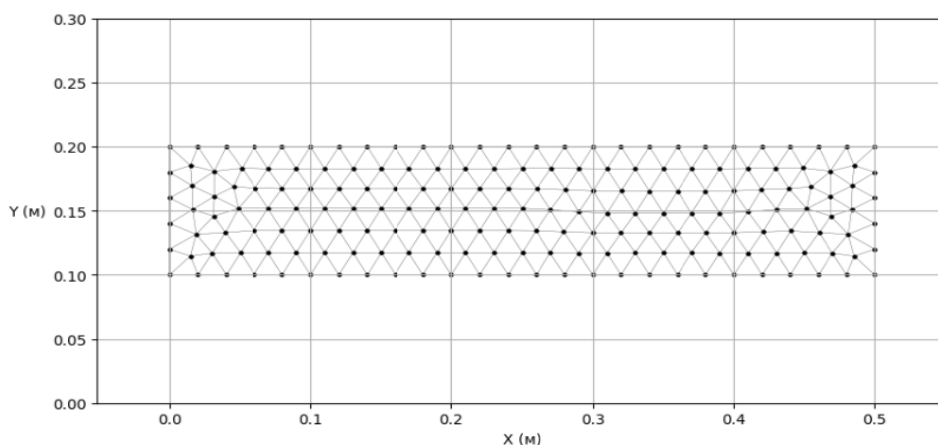


Рис. 3. Триангуляция тела с однородной структурой материала

При построении сетки неоднородной модели, состоящей из двух частей – стальной и сплавной, каждая часть разбивается на отдельные треугольники. Несмотря на раздельность разбиения, границы между частями идеально совпадают, обеспечивая согласованность сетки всей конструкции.

По алгоритму можно рассчитать напряжения для однородного стального тела, результат виден на рис. 4, 5.

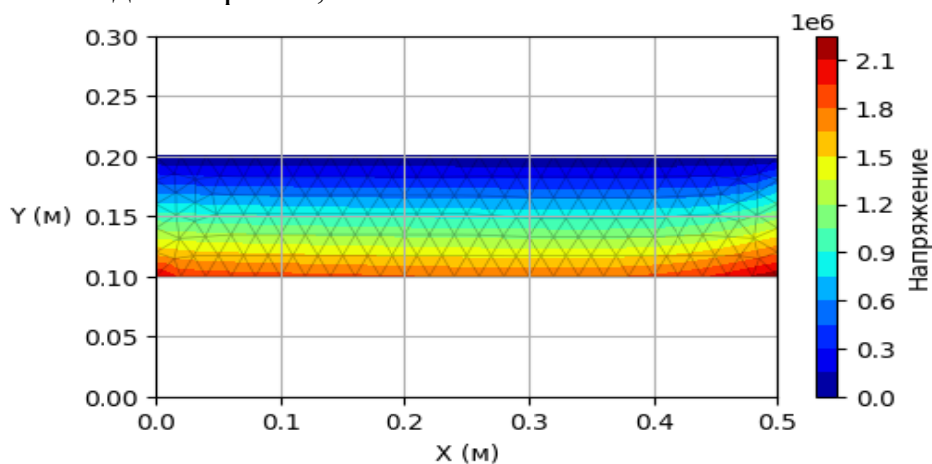


Рис. 4. График напряжения для однородного тела

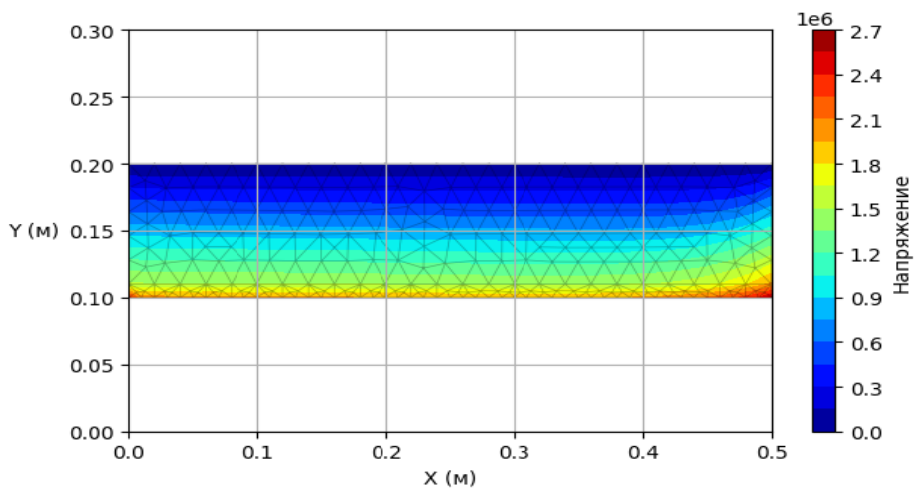


Рис. 5. График напряжения для неоднородного тела

Расчет напряжений в неоднородном теле требует особого подхода. Поскольку материал состоит из разных компонентов, расчет проводится отдельно для каждого материала. Это значит, что сначала определяются свойства каждой составляющей (матрицы упругости, жесткости и другие характеристики) индивидуально, а затем результаты объединяются с учетом структуры всей модели.

График изменения модуля Юнга по экспоненциальному закону представлен на рис. 6, 7. Данное изменение можно описать следующей формулой:

$$E(y) = E_1 + (E_1 - E_0) \cdot e^{-k(y-y_0)},$$

где $E(y)$ – модуль Юнга на глубине y , E_0 – начальный модуль Юнга на поверхности, k – коэффициент экспоненциального затухания.

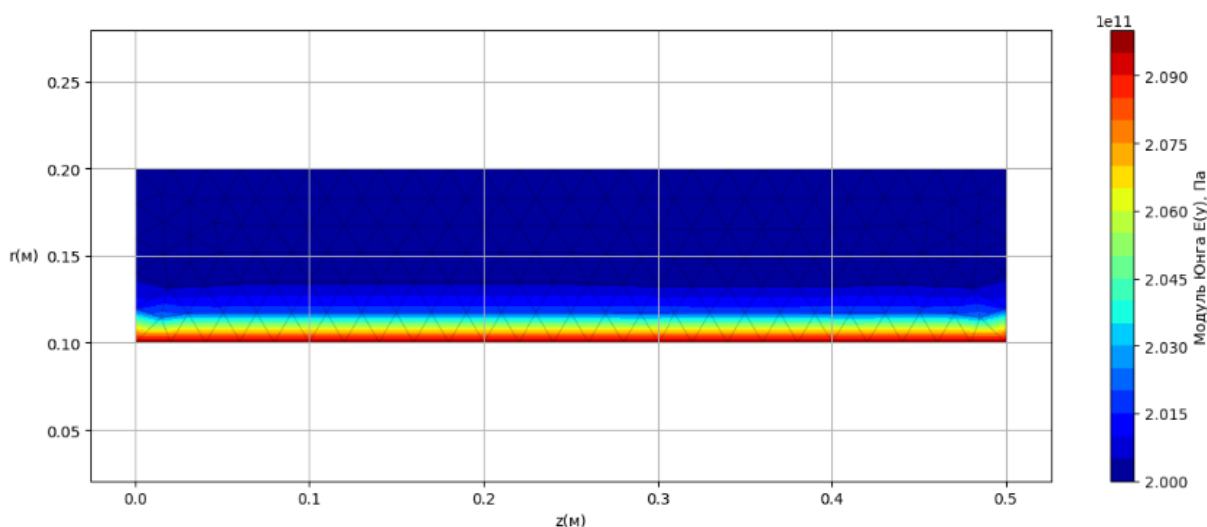


Рис. 6. Распределение модуля Юнга

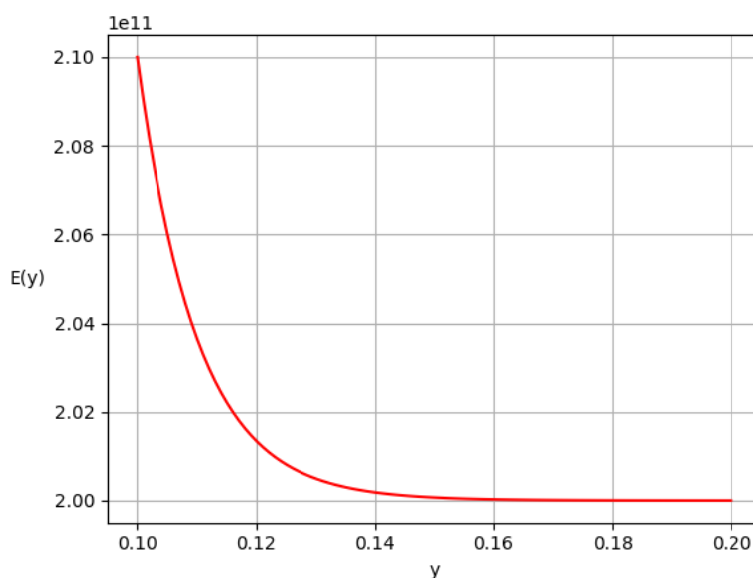


Рис. 7. Экспоненциальное изменение модуля Юнга

Решение для однородного тела можно сравнить с задачей Ламе. За внутренний и внешний радиус возьмем нижнюю и верхнюю границы модели. Результат представлен в виде графика на рис. 8.

Максимальное окружное напряжение, которое делает поверхность наиболее уязвимой к разрушению, возникает на $r = y_0$. Значение, определяющее прочностные требования к материалу:

$$\sigma_{yy}(y) = \frac{P \cdot y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} \left(1 - \frac{y_1^2}{y^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}(y) = \frac{P \cdot y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} \left(1 + \frac{y_1^2}{y^2} \right).$$

Представим сравнение напряжений всех моделей с аналитическим решением на рис. 8 и 9. Аналитическое решение совпадает с решением однородной задачи, поэтому мы будем сравнивать остальные случаи с однородной задачей.

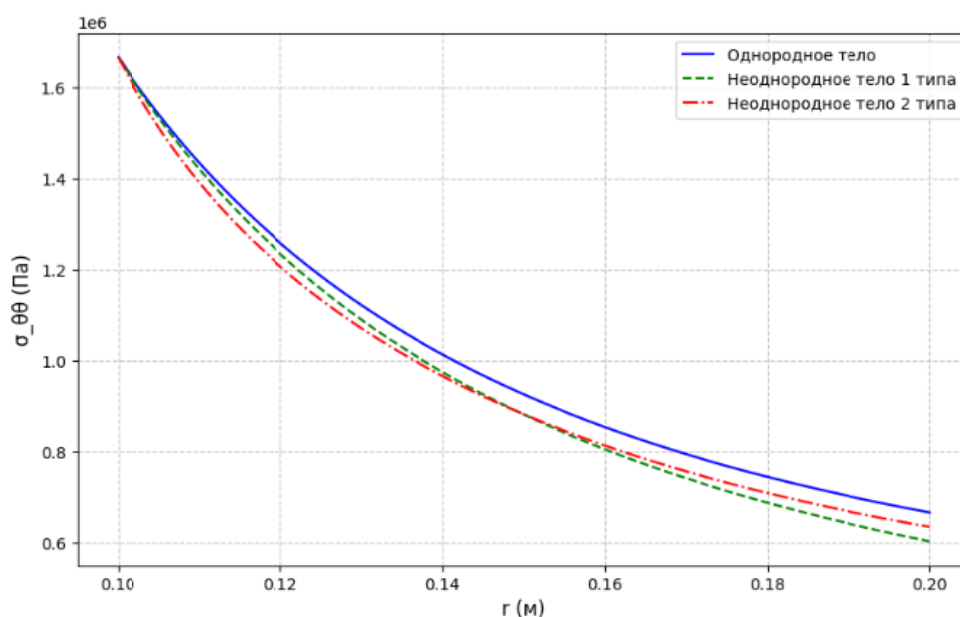


Рис. 8. Зависимость тангенциальных напряжений

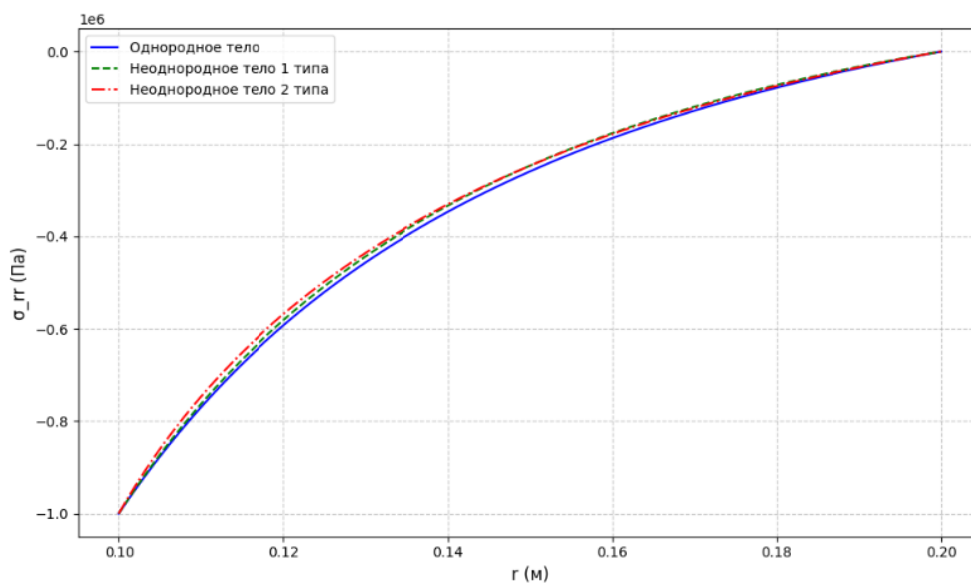


Рис. 9. Зависимость тангенциальных напряжений

На графиках видно, что зависимость радиальных напряжений у моделей совпадает значительно лучше, чем тангенциальных. Это позволяет сделать вывод, что модели достаточно точно воспроизводят распределение радиальных напряжений, тогда как точность воспроизведения тангенциальных напряжений ниже. Возможно, это связано с особенностями граничных условий или методами расчета, используемыми в моделях.

Сравнение результатов моделирования в системе двухмерного численного моделирования

Численное моделирование необходимо использовать в различных областях науки и техники, и для его реализации существует множество математических пакетов.

ANSYS – это многоцелевой пакет программ для численного моделирования физических процессов и явлений в области прочности, гидрогазодинамики, теплофизики, электромагнетизма, акустики [9].

Метод конечных элементов в ANSYS позволяет решать задачи механики деформируемого твердого тела, температурные задачи, задачи механики жидкости и газа, а также рассчитывать электромагнитные поля [9].

Последовательность расчета конструкции в среде комплекса МКЭ ANSYS:

1. Импорт или создание геометрической модели.
2. Выбор применяемых типов конечных элементов, указание данных материалов, размеров и формы поперечных сечений, а также геометрических характеристик (толщины и прочих характерных размеров оболочек и иных элементов).
3. Создание сетки конечных элементов.
4. Приложение нагрузок (в комплексе ANSYS нагрузки могут прикладываться и к объектам геометрической модели, и к объектам расчетной модели).
5. Указание опций проведения расчёта и вывода расчетных данных.
6. Проведение расчета.
7. Ознакомление с результатами.

Для подготовки конечно-элементной модели в системе ANSYS необходимо наличие трех слагаемых: корректной геометрической модели объекта, заданной модели материала и выбранного типа конечного элемента [7].

В результате работы в ANSYS были получены графики, представленные на рис. 10.

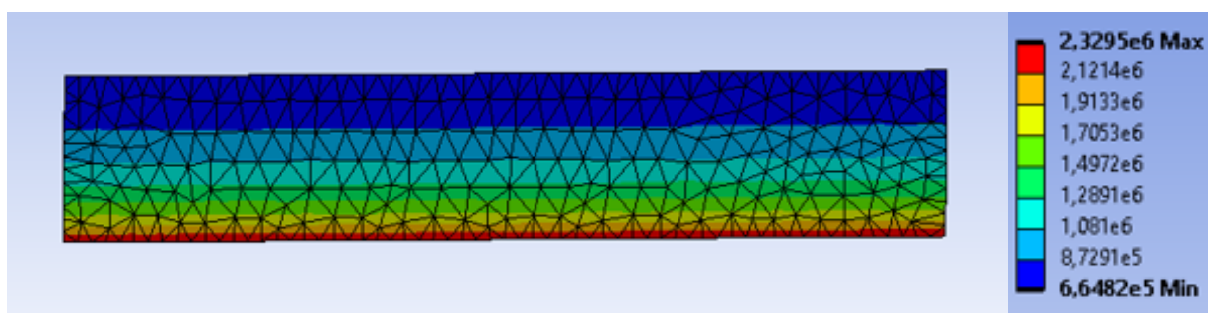


Рис. 10. График деформации для однородного тела в ANSYS

Анализ результатов

Метод конечных элементов (МКЭ) реализован в коде для анализа напряженно-деформированного состояния прямоугольной области. Результаты расчета поля напряжений в однородном теле совпадают с аналогичными решениями, полученными в программе ANSYS, что подтверждает правильность разработанной реализации МКЭ.

Далее приведены графики распределения напряжений для случая однородного и неоднородного тел. Видно, что изменение упругих характеристик (модуль Юнга) влияет на распределение деформаций внутри тела. Приведенный график демонстрирует экспоненциальное снижение значений деформации со временем, что соответствует характерному поведению материалов при проявлении эффекта ползучести.

Также проведено сравнение результатов расчета напряжённого состояния однородного тела с аналитическим решением классической задачи Ламе. Получено, что максимальные окружные напряжения возникают именно на внутренней поверхности тела. Это означает, что внутренняя поверхность является самой слабой зоной конструкции и ее прочностные характеристики определяют надежность всей системы.

Список литературы

1. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва : Мир, 1975. – 541 с.
2. *Коваленко, А. Д.* Термоупругость. – Киев : Вища школа, 1975. – 216 с.
3. *Колтунов, М. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел : учеб. пособие для вузов / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – Москва : Высш. шк., 1975. – 527 с.
4. *Маковкин, Г. А.* Применение МКЭ к решению задач механики деформируемого твердого тела : учеб. пособие / Г. А. Маковкин, С. Ю. Лихачева. – 2012. – 72 с.
5. Метод конечных элементов / В. И. Прокопьев, А. П. Суворов, О. А. Негрозов, И. Ю. Ланцова. – 2018. – 139 с.
6. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов. – Москва : Мир, 1979. – 393 с.
7. *Секулович, М.* Метод конечных элементов. – Москва : Стройиздат, 1993. – 664 с.
8. *Шаблий, Л. С.* Компьютерное моделирование : учеб. пособие. – 2017. – 107 с.
9. *Шкловец, А. О.* Работа в САЕ-пакете ANSYS MECHANICAL: Конструкционный анализ методом конечных элементов / А. О. Шкловец, В. С. Мелентьев. – 2017. – 73 с.
10. *Хоменко, Ю. П.* Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах / Ю. П. Хоменко, А. Н. Ищенко, В. З. Касимов. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. – 256 с.

Разработка информационно-аналитической системы классификации временных рядов нейронными сетями глубокого обучения

Тукмачёв Н. А.

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Разработана информационно-аналитическая система для классификации временных рядов. Система объединяет инструменты предварительной обработки данных, методы извлечения признаков и различные алгоритмы машинного обучения для выявления аномалий в сигналах. Исследование посвящено оценке эффективности различных подходов к анализу временных рядов при решении задач классификации. Реализован комплексный метод извлечения информативных признаков, включающий расчет статистических характеристик, анализ спектральных составляющих с выявлением доминирующих частот и определением энергии в различных частотных диапазонах, а также применение вейвлет-преобразования для выделения нестационарных особенностей временных рядов. В информационно-аналитической системе реализованы и сопоставлены между собой различные алгоритмы классификации: сверточные нейронные сети, рекуррентные сети с долгой краткосрочной памятью, метод случайного леса, логистическая регрессия и метод опорных векторов. Проведено экспериментальное исследование на наборах данных, содержащих записи нормальных и аномальных сигналов. Созданная информационно-аналитическая система обеспечивает комплексный подход к анализу временных рядов и может быть использована в различных прикладных областях, требующих детектирования аномалий и классификации сигналов.

Ключевые слова: информационно-аналитическая система, классификация, спектрограмма, сверточная нейронная сеть неисправности подшипников, механизм вращения шпинделя.

Задача классификации временных рядов является одной из фундаментальных проблем анализа данных и находит широкое применение в различных прикладных областях, включая техническую диагностику, медицину и промышленное производство. Особую актуальность приобретает разработка эффективных методов и систем для анализа сигналов с целью диагностики технического состояния механического оборудования, в частности, подшипников качения, неисправности которых могут привести к аварийным ситуациям [1].

Традиционные подходы к классификации временных рядов основываются на извлечении статистических характеристик сигналов и применении классических алгоритмов машинного обучения. Однако такие методы часто недостаточно эффективны при работе с высокоразмерными данными и сложными нелинейными зависимостями, характерными для вибрационных сигналов.

В последние годы значительный прогресс в области анализа временных рядов связан с применением методов глубокого обучения, в частности, сверточных нейронных сетей, рекуррентных нейронных сетей и их модификаций.

Для решения задачи классификации вибрационных сигналов подшипников применяется комплексный подход, состоящий из взаимосвязанных этапов обработки и анализа данных. Начальный этап включает предварительную обработку сигналов, в ходе которой выполняется фильтрация шумов, нормализация данных и сегментация сигналов. На следующем этапе осуществляется извлечение информативных признаков из обработанных сигналов с применением методов анализа. В частности, вычисляются статистические характеристики во временной области, такие как среднее значение, стандартное отклонение, асимметрия и эксцесс. Параллельно производится спектральный анализ на основе кратковременного преобразования Фурье, а также выполняется вейвлет-преобразование для получения детального частотно-временного представления сигналов. Данные этапы позволяют получить спектрограммы – двумерные частотно-временные представления вибрационных сигналов, наглядно отображающие распределение энергии сигнала по различным частотам в течение времени.

Заключительный этап подхода состоит в классификации предварительно обработанных и проанализированных сигналов с использованием нейронных сетей глубокого обучения. Структура сверточной нейронной сети представлена на рис. 1.

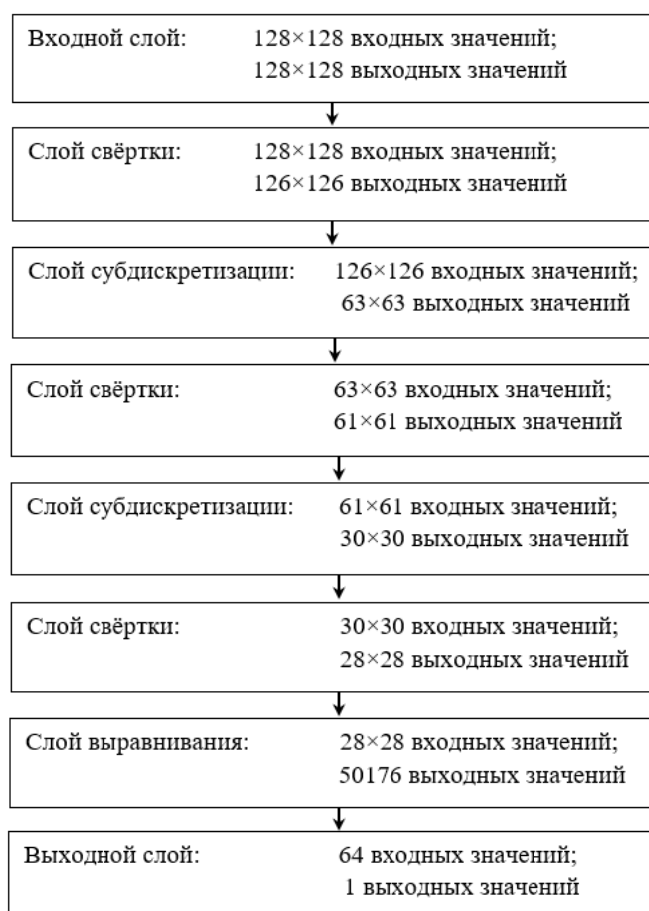


Рис. 1. Архитектура сверточной нейронной сети

Разработанная информационно-аналитическая система (ИАС) классификации временных рядов построена по клиент-серверной архитектуре (рис. 2), обеспечивающей оптимальное разделение функциональности между компонентами системы.



Рис. 2. Архитектура информационно-аналитической системы

Клиентская часть системы реализована на платформе Windows Forms с использованием языка программирования C# и предоставляет графический интерфейс для взаимодействия с данными. Она отвечает за загрузку исходных временных рядов из локального хранилища пользователя, их визуализацию в различных представлениях, включая временную область и спектрограммы, а также выбор параметров, классификации и обучающих выборок данных. Клиентское приложение позволяет осуществлять навигацию по загруженным экспериментам, детальный просмотр сигналов, управление параметрами предварительной обработки и формирование запросов на классификацию с использованием предварительно обученных моделей нейронных сетей. Серверная часть системы, реализованная на языке Python с использованием фреймворка FastAPI, выполняет вычислительные операции по предварительной обработке сигналов, формированию наборов признаков, обучению моделей глубоких нейронных сетей и оценке их эффективности. Она включает модули для спектрального анализа сигналов, вейвлет-преобразования, статистической обработки и реализации различных архитектур нейронных сетей, в том числе

свёрточных сетей для работы со спектрограммами. Серверная часть обеспечивает хранение предобработанных наборов данных в соответствующей базе данных, сохранение обученных моделей с их метапараметрами, а также сбор и анализ метрик эффективности для различных конфигураций моделей. Взаимодействие между клиентской и серверной частями осуществляется посредством REST API. При получении запроса на классификацию серверная часть применяет выбранную модель к предоставленным данным и возвращает результат классификации вместе с дополнительной информацией о достоверности прогноза.

Исследования проводились на данных вибрационных сигналов подшипников, полученных с помощью специально сконструированного устройства. Устройство состояло из вала с установленными на нем двумя подшипниками, с возможностью регулирования скорости вращения в диапазоне от 0 до 1500 оборотов в минуту. Вибрационные сигналы регистрировались с помощью акселерометров GY-61 ADXL335, установленных на корпусе каждого подшипника, с частотой дискретизации 3000 Гц. Экспериментальная выборка включает 112 экспериментов, разделенных на 2 класса: 12 – без дефектов и 100 – с дефектами. Каждый сигнал содержал более 150 000 значений и представлял собой многомерный временной ряд, включающий вибрационные сигналы по осям x , y и z , скорость вращения, частоту и потребляемую мощность [4].

Для обучения нейронной сети данные были разделены на обучающую (70 %) и тестовую (30 %) выборки. Были выделены несколько методов для классификации:

1. Разделение трехканальной спектрограммы на равные сегменты для повышения устойчивости модели, с последующим применением алгоритма принятия решения, включающего в себя определение значения вероятности каждого сегмента и получения итоговой принадлежности классу при помощи порогового уровня.

2. Подход с построением одноканальных спектрограмм для каждой оси.

3. Применение рекуррентной нейронной сети с долгой краткосрочной памятью (LSTM).

4. Применение гибридной архитектуры на основе сверточной нейронной сети и сети с долгой краткосрочной памятью (CNN-LSTM).

Результаты обучения разработанных моделей классификации сведены в таблице, из которой следует, что на контрольной выборке первые два метода являются наиболее лучшими для данной задачи.

Метрики оценок моделей

Параметр	CNN с трехканальной спектрограммой	CNN с одноканальными спектрограммами	LSTM	CNN-LSTM
Обучающая выборка				
Точность	1	1	0.98	1
Контрольная выборка				
Точность	1	1	0.95	0.97

В результате была разработана информационно-аналитическая система с графическим пользовательским интерфейсом для решения задач классификации временных рядов. Проведен анализ алгоритмов классификации сигналов. На основе анализа данных вибрационных сигналов подшипников была решена задача определения неисправностей подшипников и представлены подходы для классификации. Было показано, что подходы с сегментами и одноканальными спектрограммами показали лучший результат на контрольной выборке (точность – 1) по сравнению с методами LSTM (точность – 0,95) и CNN-LSTM (точность – 0,97).

Список литературы

1. *Курилова, Е. В.* Разработка алгоритма диагностирования подшипников качения по параметрам вибрации / Е. В. Курилова, С. А. Игнатъев // Вестник СГТУ. – 2011. – Вып. 2, № 3 (58). – С. 199–202.
2. Cao Y, Cheng X and Zhang Q (2022), An improved method for fault diagnosis of rolling bearings of power generation equipment in a smart microgrid. *Front. Energy Res.* 10:1006215. doi: 10.3389/fenrg.2022.1006215.
3. *Ибряева, О. Л.* Диагностика неисправностей подшипников качения с использованием пиков спектра и нейронных сетей / О. Л. Ибряева, М. Н. Мохаммад // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2022. – Т. 11, № 2. – С. 59–71. – DOI: 10.14529/cmse220205.
4. Isaienkov K., Zadorozniy I. Данные сигналов: «Bearing classification». – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/isaienkov/bearing-classification> (дата обращения: 29.04.2025).

СЕКЦИЯ 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 004.8

Разработка интеллектуальной системы диагностики заболеваний по текстовым данным

Н. И. Аймурзин

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Интеллектуальный анализ текстовых данных открывает новые возможности в автоматизации диагностики заболеваний. В работе представлены результаты разработки интеллектуальной системы диагностики заболеваний по неструктурированным медицинским текстам. Проведен обзор современных подходов к обработке и диагностике медицинской информации, включая применение нейронных сетей, языковых моделей и регулярных выражений. Изучены методы выявления симптомов заболеваний в текстах. Разработана база текстовых медицинских данных, выполнена разметка и аугментация данных. Сформирована и обучена модель диагностики заболеваний, оценена ее точность и обобщающая способность. Разработано программное обеспечение для диагностики заболеваний с модульной архитектурой.

Ключевые слова: интеллектуальная система диагностики, обработка медицинских текстов, автоматизация диагностики, неструктурированные данные, нейронные сети, языковые модели, извлечение симптомов.

Введение

Современные методы искусственного интеллекта, в частности машинное обучение и глубокое обучение, открывают новые горизонты в медицинской диагностике, предлагая возможности для автоматизации и улучшения точности медицинских диагнозов. С ростом объема медицинской документации и необходимости оперативного анализа данных возрастает потребность в автоматизированных системах, способных эффективно обрабатывать текстовую информацию и выделять из нее значимые сведения.

В рамках курсовой работы осуществляется разработка и применение нейросетевых моделей для обработки и анализа медицинских текстов, конкретно эпикризов, с целью автоматического определения медицинских диагнозов. Это

позволит сократить время анализа документов и минимизировать вероятность врачебных ошибок.

Актуальность темы обусловлена увеличением объема медицинской информации и потребностью в системах, способных ускорить процесс обработки данных и повысить точность диагностики.

Из медицинских документов в общем случае требуется извлечь сущности разных типов: названия заболеваний и нарушений функционирования человеческого организма, симптомов болезней, медицинских процедур, лекарственных препаратов, упоминания частей тела и другие. Извлечение каждой такой сущности из текста на естественном языке является достаточно сложной задачей, в состав которой включается не только сам этап извлечения, но и этапы нормализации и отнесения извлеченной сущности к определенной категории.

В данной работе рассматривается комплексный подход к извлечению симптомов болезней из текстов на естественном языке и по структурированным данным, а также предсказание диагноза по выделенным симптомам.

Извлечение симптомов из текста

Перед построением модели для извлечения симптомов и предсказания диагноза был проведен этап предобработки входных медицинских документов в формате XML:

Первым этап предобработки включает в себя разметку и извлечение текстовых данных из узлов XML документа, выделение ключевых разделов, содержащие клинически значимую информацию.

Из всего текста документа выделяется сегмент, содержащий непосредственные жалобы пациента. Для этого используется раздел с названием «Жалобы пациента», «Анамнез заболевания». Для выделения этих разделов используется шаблонные регулярные выражения.

Пример жалоб пациента:

Кашель с вязкой мокротой зеленого цвета. Одышка при физической нагрузке. Боль в грудной клетке при кашле. Заложенность носа, выделения из носа.

Далее для возможности обработки текста производится очистка данных (удаление специальных символов, исключение тегов, удаление лишних пробелов, табуляций и перевода строки), лемматизация и токенизация.

Лемматизация – это процесс приведения словоформ к их начальной, базовой форме (лемме). Например, слова «мокроты», «мокроте» и «мокроту» будут приведены к форме «мокрота». Это позволяет увеличить точность определения в медицинских текстах, где одно и то же понятие может быть выражено в разных падежах, числах и родах [1].

Токенизация – это процесс разбиения текста на отдельные элементы, называемые токенами. Токены могут представлять собой слова, символы, фразы или другие значимые единицы текста в зависимости от задачи. Она позволяет структурировать текст для дальнейшего анализа и упрощает применение методов обработки естественного языка [1].

Для лемматизации в процессе извлечения симптомов используется библиотека spaCy, которая предоставляет встроенную поддержку морфологического анализа для русского языка через модель ru_core_news_md. Это одна из предобученных моделей spaCy для русского языка. Она входит в официальный набор моделей spaCy и обладает сбалансированным соотношением между скоростью и точностью [2].

На основе словаря или с помощью модели определяется наличие ключевых симптомов (например, «кашель», «одышка», «мокрота», «боль», «заложенность носа»). Это может быть реализовано:

- через правило-ориентированный подход: ручной список симптомов и проверка вхождения в лемматизированном тексте;
- обученные модели классификации spaCy для обработки естественного языка.

На следующем этапе используется синтаксический разбор (dependency parsing), чтобы выделить связи между словами. Синтаксический разбор проводится с помощью же модели Spacy ru_core_news_md (рис. 1). Это позволяет определить, какие прилагательные и уточнения относятся к конкретным симптомам, что позволяет определить более сложные симптомы [3].

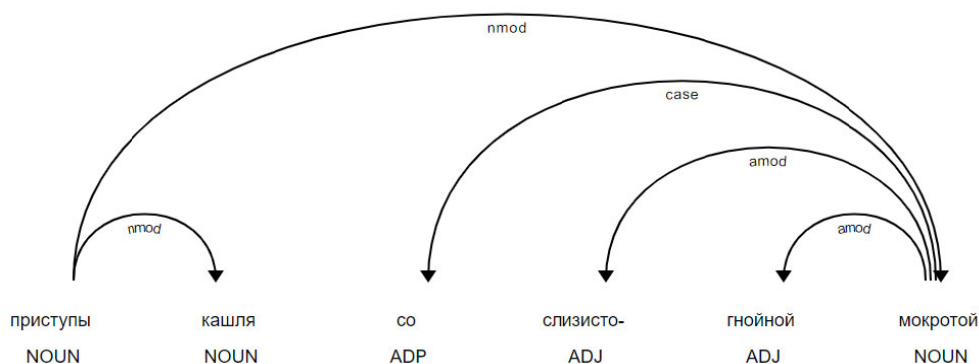


Рис. 1. Пример синтаксического разбора

Пример выделения уточнений симптомов:

- «гнойной мокротой» → [мокрота + гнойный];
- «зеленого цвета» → [мокрота + зеленая];
- «одышка при физической нагрузке» → [одышка + при физической нагрузке].

На основе найденных симптомов составляется предварительная таблица наличия симптомов, на которых будет производиться обучение нейронной сети для выявления симптомов.

Извлечение симптомов с помощью модели

На этих результатах составляется выборка, в которой каждому текстовому фрагменту присваиваются метки симптомов. Для решения задачи используется компонент TextCategorizer в spaCy, который обучается на размеченных данных.

Описание алгоритма обучения:

1. Прямой ход: входные данные x поступают в модель, которая производит предсказания \hat{y} на основе текущих параметров модели θ . Возьмем функцию модели как $f(x, \theta)$, тогда:

$$\hat{y} = f(x, \theta).$$

2. Вычисление ошибки: ошибка модели вычисляется с использованием функции потерь, которая измеряет расхождение между предсказанным \hat{y} и истинными метками y . В spaCy для многоклассовой классификации используется кросс-энтропийная функция потерь:

$$L(\theta) = - \sum_{k=1}^K y_k \log(\hat{y}_k),$$

где $L(\theta)$ – функция потерь; y_k – истинные метки, \hat{y}_k – предсказанные вероятности для класса k .

3. Обратное распространение ошибки: после вычисления ошибок вычисляются градиенты ошибки по параметрам модели:

$$g_t = \nabla_{\theta} L(\theta_t),$$

где g_t – градиенты функции потерь по параметрам модели на t -м шаге, $\nabla_{\theta} L(\theta_t)$ – частные производные функции потерь относительно каждого параметра θ .

4. Оптимизация параметров: в spaCy для оптимизации параметров используется метод «Adam», который адаптирует скорость обучения для каждого параметра модели.

5. Обновление параметров. Параметры модели обновляются с использованием скорректированных моментов и адаптивной скорости обучения:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} \hat{m}_t,$$

где θ_t – параметры модели на t -ом шаге, α – скорость обучения.[4]

После обучения модель способна классифицировать новый текст и определять, какие симптомы в нём присутствуют. Рассмотрим пример выявления симптомов с помощью модели. Для этого в модель подаются текст из анамнеза, содержащий жалобы и анамнез пациента. Пример текста, подающийся в модель:

Жалобы пациента: кашель со слизисто-гнойной мокротой, вязкой, трудноотделяемой. Одышка смешанного характера, в покое, усиливается при минимальной физической нагрузке. Слабость, свистящие хрипы в груди. Анамнез заболевания: Настоящее ухудшение – месяц тому назад, – появились приступы удушья, усилилась одышка, появилась гнойная мокрота.

В результате обработки данного текста, на выходе модели получаем бинарную матрицу симптомов (табл. 1), где для каждого симптома определено его наличие (True) или отсутствие (False).

Таблица 1. Таблица с выявленными симптомами

Симптом	Значение
Кашель	True
Сухой кашель	False
Наличие мокроты	True
Светлая мокрота	False
Гнойная мокрота	True
Кровохарканье	False
Ухудшение состояния за несколько дней	False
Ухудшение состояния за недели	False
Ухудшение состояния за месяцы	True
Потеря обоняния или вкуса	False
Одышка	True
Одышка при физической нагрузке	True
Одышка в покое	True
...	...
Боль в груди	False

Для оценки качества работы модели для выявления симптомов обучающая выборка, состоящая из текстовой части анамнеза, выделенная из 2378 документов, была разделена на обучающую и тестовую части, в соотношении 90/10. Качество обученной модели определяется на тестовом наборе данных, используя метрики точности, полноты и F1-score.

Для расчета этих метрик для начала вычисляются базовые элементы матрицы ошибок:

True Positive (TP) – модель правильно предсказала положительный класс;

False Positive (FP) – модель ошибочно предсказала положительный класс;

True Negative (TN) – модель правильно предсказала отрицательный класс;

False Negative (FN) – модель ошибочно предсказала отрицательный класс.

Точность (Precision) – доля правильно предсказанных объектов класса среди всех объектов, которые модель отнесла к этому классу:

$$\text{Precision}_i = \frac{TP_i}{TP_i + FP_i}.$$

Полнота (Recall) – доля правильно предсказанных объектов класса среди всех реальных объектов этого класса.

$$\text{Recall}_i = \frac{TP_i}{TP_i + FN_i}.$$

F1-мера (F-score) – является гармоническим средним точности и полноты, дает общее представление о балансе между этими двумя показателями

$$F\text{-score}_i = 2 \frac{\text{Precision}_i * \text{Recall}_i}{\text{Precision}_i + \text{Recall}_i}.$$

Для оценки работы модели по всем классам используется взвешенное среднее по всем классам n , что учитывает дисбаланс классов и дает больше веса часто встречающимся классам [5].

$$\text{Метрика}_{\text{сред}} = \sum \frac{n_i}{N} * \text{Метрика}_i.$$

Рассмотрим метрики точности полноты и оценки F1-score, рассчитанные после каждой итерации обучения. По графику точности предсказания (рис. 2) можно увидеть, что модель на обучающей выборке достигает точности 99,9 %, на тестовой 98,5 %, что указывает на высокую обобщающую способность модели.

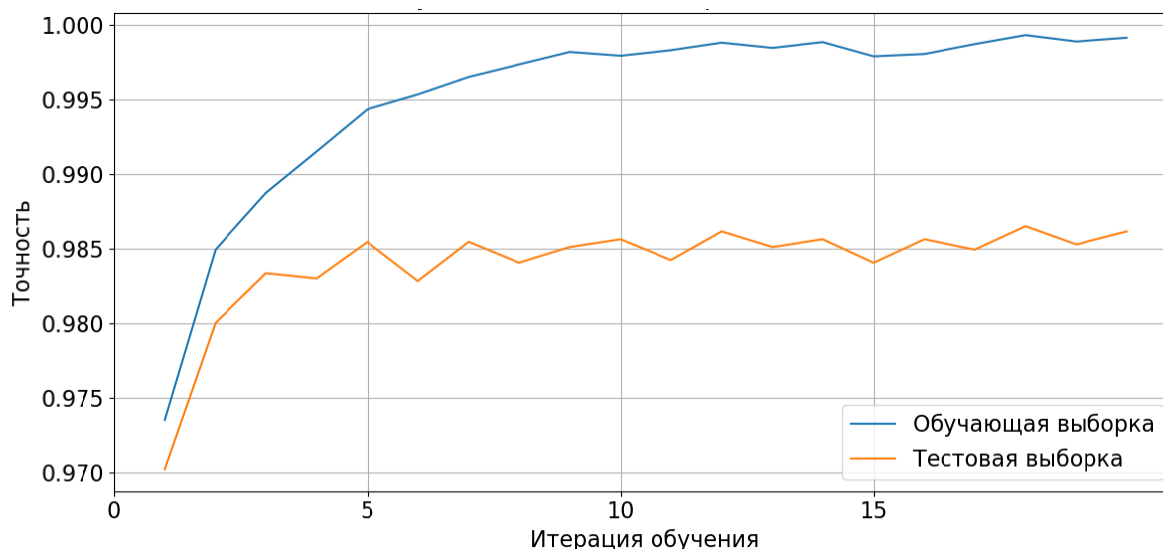


Рис. 2. График точности модели по эпохам обучения

Рассмотрим график полноты предсказания (рис. 3). На обучающем наборе данных полнота достигла 99 %, на тестовой выборке полнота снизилась до 93 %, что является высоким показателем, но может говорить о снижении чувствительности модели на новых данных.

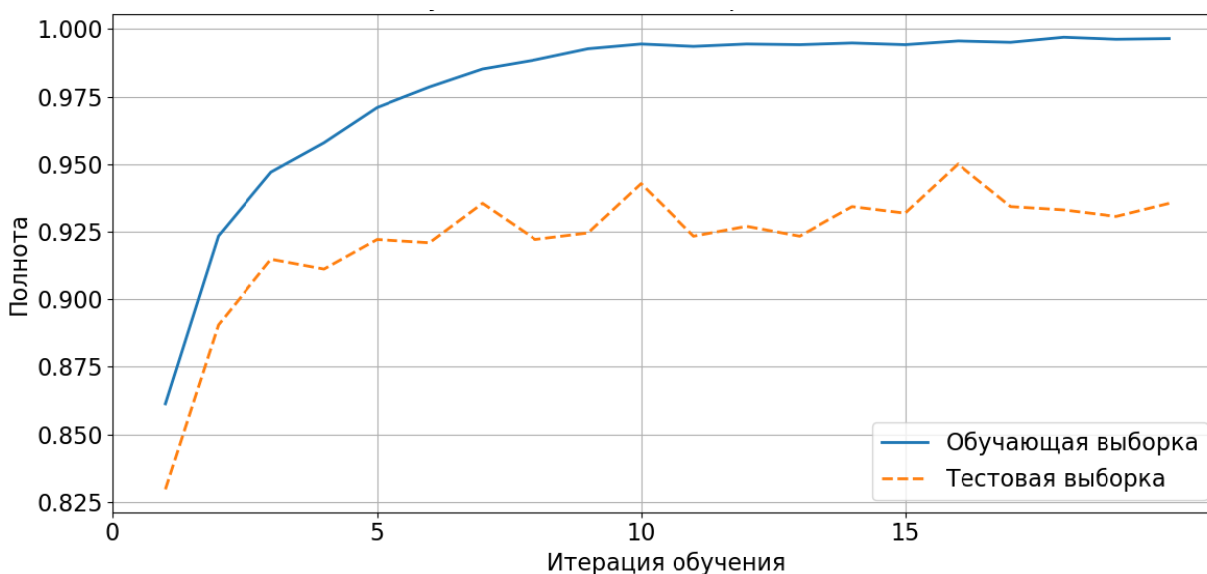


Рис. 3. График полноты предсказания модели по эпохам обучения

Для анализа причины снижения полноты, рассмотрим матрицу ошибок для некоторых часто встречающихся и редко встречающихся симптомов (табл. 2–5). Для симптомов, часто представленных в обучающей выборке, модель показывает высокую способность к предсказанию. Для симптомов, которые в обучающей выборке встречаются реже, показатели качества ниже, что может говорить о дисбалансе классов, при котором модель обучается в первую очередь на доминирующих классах.

Таблица 2. Матрица ошибок для симптома «Одышка при физической нагрузке»

Истинно \ Предсказано	Да	Нет
	Да	88
Нет	4	143

Таблица 3. Матрица ошибок для симптома «Боль в груди»

Истинно \ Предсказано	Да	Нет
	Да	6
Нет	1	224

Таблица 4. Матрица ошибок для симптома «Сухой кашель»

Истинно \ Предсказано	Да	Нет
	Да	43
Нет	3	191

Таблица 5. Матрица ошибок для симптома «Гнойная мокрота»

Истинно \ Предсказано	Да	Нет
	Да	15
Нет	0	218

Данные, полученные с помощью модели и результаты лабораторных тестов, используются в дальнейшем для диагностики заболевания, описанном в следующем разделе.

Предсказание диагноза

Входными данными для нейронной сети служит векторное представление симптомов, сформированное на основе модели

$$x \in \{0,1\}^n,$$

где x_i – соответствует симптому из сформированного списка, n – количество симптомов.

Выходными данными является список предсказываемых диагнозов в виде вектора вероятностей:

$$y \in [0,1]^m,$$

где m – количество возможных диагнозов, y_j – вероятность того, что у пациента диагноз j .

В табл. 6 показан список диагнозов для предсказания, а также их коды, указанные в эпикризе.

Таблица 6. Коды основных заболеваний

Нозология	Код МКБ10
Туберкулез	A15A16A19
Рак легкого	C34
Бактериальная пневмония	J13J14J15J16J18
Вирусная пневмония (включая SARS-Cov2)	J10J12U07
Хроническая обструктивная болезнь легких (ХОБЛ)	J44
Хроническая тромбоэмболическая легочная гипертензия (ХТЭЛГ)	I27
Здоровый человек (не болен ни одной из вышеперечисленных нозологий)	В эпикризах может присутствовать любой код МКБ10, кроме указанных выше

Нейронная сеть, используемая для предсказания диагноза, представляет собой многослойную полносвязную модель, состоящую из следующих видов слоев:

Линейный слой (Linear) – это основной строительный блок нейронных сетей, отвечающий за линейное преобразование входных данных.

Функция активации ReLU – применяется к выходу линейного слоя для добавления нелинейности, что позволяет модели предсказывать сложные зависимости.

Слой регуляризации (Dropout) – используемый для уменьшения переобучения в нейронных сетях. Во время обучения случайным образом зануляется часть нейронов слоя с заданной вероятностью. Это предотвращает чрезмерную зависимость модели от отдельных нейронов.

Функция активации Softmax – применяется на выходном слое нейронной сети для задач многоклассовой классификации. Она преобразует выходной вектор в вероятностное распределение по классам [6].

В табл. 7 представлена структура нейронной сети.

После обучения модели проведена оценка качества работы модели для предсказания диагноза. Обучающая выборка была разделена на обучающую и тестовую, в соотношении 80/20. После каждой эпохи вычислены метрики точности (рис. 4). По графику точности предсказания можно увидеть, что модель на обучающей выборке достигает точности 90 %, на тестовой – 80 %.

Таблица 7. Структура полносвязной НС

Номер слоя	Тип слоя	Вход – выход	Описание
1	Linear	80 – 64	Полносвязный слой
2	ReLU	64 – 64	Слой активации
3	Dropout (0.2)	64 – 64	Регуляризация
4	Linear	64 – 32	Полносвязный слой
5	ReLU	32 – 32	Слой активации
6	Dropout (0.2)	32 – 32	Регуляризация
7	Softmax	32 – 7	Выходной слой

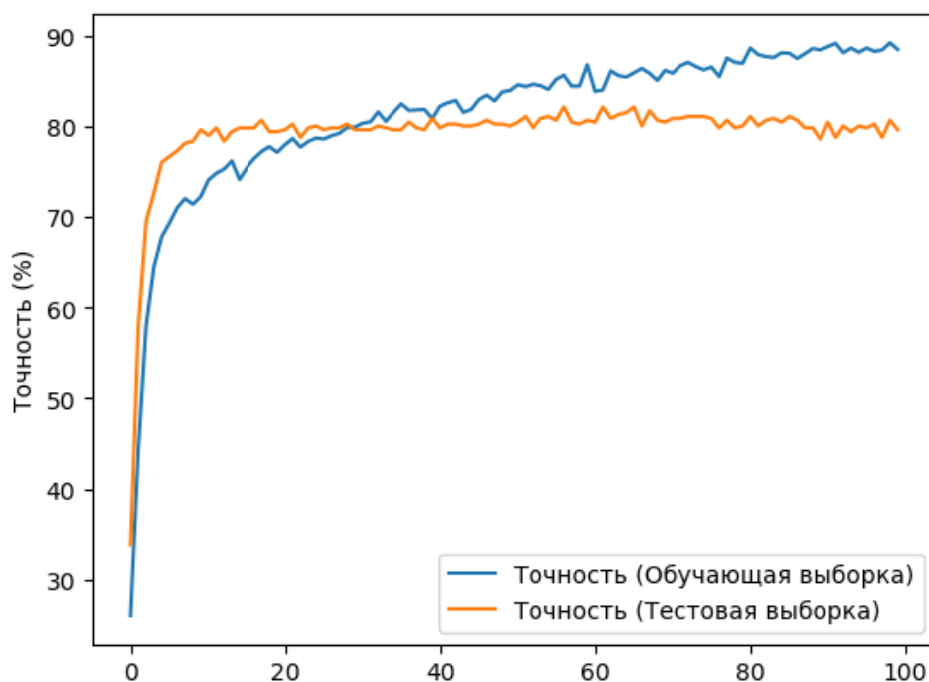


Рис. 4. График точности модели по итерациям обучения

Рассмотрим отчет о производительности модели на обучающей и тестовой выборках. В табл. 8 показаны и метрики каждого предсказываемого класса, а также общее взвешенное значение.

Модель показала высокую точность на обучающих данных 90 %, что свидетельствует о хорошем распознавании паттернов в этих данных. Однако точность на тестовых данных значительно ниже, чем на обучающей выборке, что может указывать на то, что модель сталкивается с трудностями при обобщении своих знаний на новых данных.

Для автоматического выделения симптомов и определения диагноза по файлу эпикриза создан интерфейс программы (рис. 5).

Таблица 8. Отчет о производительности на обучающей и тестовой выборке

Классы (Диагнозы)	Точность (обучающая/ тестовая)	Полнота (обучающая/ тестовая)	F1-score (обучающая/ тестовая)	Количество объектов (обучающая/ тестовая)
Туберкулез	0.95/0.82	0.98/0.79	0.96/0.80	297/75
Рак легкого	0.95/0.81	0.94/0.79	0.94/0.80	302/76
Бактериальная пневмония	0.99/0.68	1/0.85	0.99/0.75	262/65
Вирусная пневмония (включая SARS-CoV-2)	1/0.81	0.99/0.81	0.99/0.81	253/63
Хроническая обструктив- ная болезнь легких (ХОБЛ)	1/0.82	1/0.84	1/0.83	301/75
Хроническая тромбоэмбо- лическая легочная гипер- тензия (ХТЭЛГ)	1/1.00	0.93/0.29	0.96/0.44	28/7
Здоровый человек (не болен ни одной из вышепе- речисленных нозологий)	0.95/0.83	0.95/0.77	0.95/0.80	459/115
Общее	0.97/0.79	0.97/0.79	0.97/0.80	1902/476

Загрузить эпикриз		Название файла: Эпикриз_17_v1.xml	
Предобработанный эпикриз			
Название группы	Название подгруппы	Значения	
13 Степень тяжести состояния пациента		2	
14 Объективизированная оценка состояния больного		-	
15 Справочник витальных параметров	Частота сердечных ...	88.0	
16 Справочник витальных параметров	Частота дыхания	22.0	
17 Справочник витальных параметров	Сатурация	94.0	
18 Федеральный справочник инструментальных диагностических ...	Спирометрия с ...	ВФЛ резко снижена по обструктивному типу. Те	
19 Федеральный справочник инструментальных диагностических ...	Рентгенография ...	Рентгенологические признаки эмфиземы легких,	
20 Федеральный справочник лабораторных исследований. ...	Глюкоза, молярная ...	5.8 ммоль/л	
21 Федеральный справочник лабораторных исследований. ...	Скорость оседания ...	32 мм/ч	
Выделить симптомы			
Выделенные симптомы			
Название симптома	Значения		
53 Артериальное давление систолическое, 140-160 мм рт.ст.	False		
54 Артериальное давление систолическое, более 160 мм рт.ст.	False		
55 Сатурация, SpO2 < 90	False		
56 Стаж курения, <5 лет	False		
57 Стаж курения, >5 лет	False		
58 Стаж курения, >20 лет	False		
59 Кашель, наличие кашля	True		
60 Кашель, сухой кашель	False		
61 Кашель, скудная мокрота	False		
Предсказать диагноз		Диагноз: Хроническая обструктивная болезнь легких (ХОБЛ)	

Рис. 5. Интерфейс программы

В программу загружается эпикриз в формате xml. После загрузки из эпикриза выделяются основные параметры состояния пациента, такие как лабораторные исследования, жалобы пациента, анамнез заболевания. Программа позволяет вывести список симптомов, выделенных из эпикриза. В нижней части интерфейса находится кнопка вывода диагноза. После анализа выявленных симптомов программа автоматически формулирует предварительное заключение.

Выводы

В работе представлена интеллектуальная система диагностики заболеваний по текстовым данным. Для решения этой задачи освоена технология выявления симптомов заболеваний из медицинских документов с использованием интеллектуальных методов анализа текста (регулярных выражений, нейронных сетей глубокого обучения).

В рамках работы разработано 2 модуля:

1. Модель для выявления симптомов, позволяющая из текстовой части эпикриза выделить симптомы. Результатом работы модели является бинарный вектор признаков, отображающий клиническую картину пациента. Модель предсказывает с точностью 99,9 % на обучающих данных, 98,5 % на тестовых, что указывает на высокую обобщающую способность модели.

2. Модель для диагностики заболевания использует данные, полученные от первой модели, и формирует предполагаемый диагноз. Для этого используется обученная модель полносвязной нейронной сети. Модель предсказывает с точностью 97 % на обучающих данных, 80 % на тестовых. Точность 80 % на тестовой выборке указывает на высокую обобщающую способность, с учетом того, что данные медицинских текстов являются слабо структурированными.

Для улучшения результатов предсказания моделей в дальнейшем можно применить следующие улучшения: увеличение объема выборки и их качества, повышение качества разметки симптомов и увеличение количества выделяемых симптомов.

Список литературы

1. *Бенгфорт, Б.* Прикладной анализ текстовых данных на Python. Машинное обучение и создание приложений обработки естественного языка / Б. Бенгфорт, Р. Билбро, Т. Охеда. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 368 с.

2. *Industrial-Strength Natural Language Processing in Python.* – URL: <https://spacy.io> (дата обращения: 28.05.2025).

3. *Васильев, Ю.* Обработка естественного языка. Python и spaCy на практике. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 250 с.

4. *Гольдберг, Й.* Нейросетевые методы в обработке естественного языка. – Москва : ДМК, 2019. – 282 с.

5. *Мюллер, А.* Введение в машинное обучение с помощью Python. Руководство для специалистов по работе с данными. – Вильямс ; O'Reilly, 2017. – 480 с.

6. *Макмахан, Б.* Знакомство с PyTorch: глубокое обучение при обработке естественного языка / Б. Макмахан, Д. Рао. – Санкт-Петербург : Питер, 2018. – 256 с.

Применение алгоритмов классификации для анализа текстовых сообщений

А. Г. Ананикова, К. И. Дизендорф

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В статье рассматривается применение алгоритмов машинного обучения для классификации текстовых сообщений с целью выявления фишинговых электронных писем. Объектом исследования являются интеллектуальные методы обработки слабоструктурированных данных, а предметом исследования – математическая модель анализа содержания электронного письма на выявление признаков фишинга. Цель работы заключается в построении алгоритма, способного классифицировать электронные письма как безопасные или фишинговые.

Ключевые слова: машинное обучение, модели классификации, корпус данных, предобработка текста, метрики качества.

Введение

С развитием цифровых технологий и увеличением числа писем, отправляемых и получаемых за единицу времени, становится все более актуальной проблема фишинга. Суть фишинговых атак заключается в получении злоумышленниками конфиденциальной информации пользователей, что приводит к существенным финансовым потерям жертв атаки [1]. Поэтому возникает необходимость в разработке способов автоматического анализа электронных писем на наличие признаков фишинга. Одним из эффективных вариантов для решения этой задачи является применение алгоритмов машинного обучения, позволяющих классифицировать текстовые сообщения на основе их содержания.

Данная работа направлена на разработку алгоритма для исследования электронных писем на предмет безопасности. Для ее выполнения были поставлены следующие задачи: изучить теоретические основы машинного обучения и алгоритмов классификации; провести предобработку текстовых данных: очистку, токенизацию, лемматизацию; реализовать и сравнить несколько алгоритмов классификации; выбрать наилучший метод и на его основе разработать приложение для классификации писем и провести тестирование приложения на новых данных. В работе будет описана реализация трех моделей машинного обучения: логистическая регрессия, многослойный перцептрон и модель k ближайших соседей.

Предобработка данных

Текстовые данные – одна из разновидностей строкового типа данных. Они состоят из слов и предложений. К таким данным относятся, например, киноотзывы, собрание сочинений, отзывы о магазине, выступления известного политика и т. д. В машинном обучении набор текстовых данных обычно называют корпусом, а отдельно взятый текст – документом. Перед тем как приме-

нять алгоритмы машинного обучения к набору текстовых данных, их необходимо предобработать.

В данной работе используется набор данных под названием «*Phishing_email*» [2]. Он содержит электронные письма различной тематики. В наборе данных содержится 5587 текстов электронных писем, приведен текст электронного письма и его тип – фишинговое или безопасное. Так как имеется всего два класса писем, то речь пойдет о задаче бинарной классификации. Рассмотрим, как выглядит текст без предварительной обработки. Текст необработанного электронного письма приведен в листинге 1.

Листинг 1. Текст электронного письма без обработки

```
'\nQuestion?Do you want a different job?\nDo you want to be your own boss?\nDo you need extra income?\nDo you need to start a new life?\nDoes your current job seem to go nowhere?If you answered yes to these questions, then here is your solution.We are a fortune 500 company looking for motivated individuals who are \nlooking\nto a substantial income working from home.Thousands of individual are currently do this RIGHT NOW.\nSo if you are looking to be employed at home, with a career that will\nprovide you vast opportunities and a substantial income, please fill\nout our online information request form here now:http://ter.netblah.com:27000To miss out on this opportunity, click herehttp://ter.netblah.com:27000/remove.html\n'
```

Текст написан в свободной форме естественного языка: содержит знаки препинания, различный регистр, числа, различные формы слов.

Для обработки естественного языка будет использоваться библиотека *NLTK (Natural Language Toolkit)*. Первым шагом в обработке текста является токенизация – разбиение текста на отдельные слова (токены) и приведение всех слов к нижнему регистру [3]. Далее в тексте удаляются все неалфавитные значения, а также стоп-слова – слова, которые не несут смысловой нагрузки. Одним из важных этапов в предобработке естественного языка является лемматизация – приведение всех слов к начальной форме (лемме). Для лемматизации используем библиотеку *rumorphy3*. Далее нужно оставить только уникальные слова и добавить все предобработанные документы, представленные в виде списка слов, в корпус.

Посмотрим, как выглядит окончательный список слов. Результат приведен в листинге 2.

Листинг 2. Пример элемента корпуса

```
{'answered', 'boss', 'career', 'click', 'company', 'current', 'currently', 'different', 'employed', 'extra', 'fill', 'form', 'fortune', 'herehttp', 'home', 'http', 'income', 'individual', 'individuals', 'information', 'job', 'life', 'looking', 'miss', 'motivated', 'need', 'new', 'nowhere', 'online', 'opportunities', 'opportunity', 'please', 'provide', 'question', 'questions', 'request', 'right', 'seem', 'start', 'substantial', 'vast', 'want', 'working', 'yes'}
```

Таким образом, все слова приведены к нижнему регистру, приведены к единой форме, удалены предлоги, союзы, местоимения, слова длиной меньше трех символов, знаки препинания и другие специальные символы. В дальнейшем в процессе обучения моделей классификации будет рассмотрен вопрос о влиянии различных этапов предобработки текста на качество обучения, для этого в функции предобработки реализованы логические операции для включения/выключения операций обработки текста (удаление стоп-слов, лемматизация, удаление коротких слов).

Полученный корпус данных готов к дальнейшему преобразованию к форме, понятной алгоритмам машинного обучения.

Для решения задачи классификации текстовые данные необходимо представить в математической форме, чтобы подать их на вход алгоритма машинного обучения [4]. Существуют различные методы, позволяющие преобразовать категориальные данные в числовые векторы признаков. Будут рассмотрены такие модели, как «мешок слов» (*bagofwords*), метод «*tf-idf*», а также техника «*Word2Vec*».

Модель «мешок слов» является одной из самых простых и при этом эффективных моделей преобразования текста в числовую форму. Она включает в себя словарь известных слов и меру присутствия этих слов в документе [5]. Пример обработки текста с помощью этой модели представлен на рис. 1.

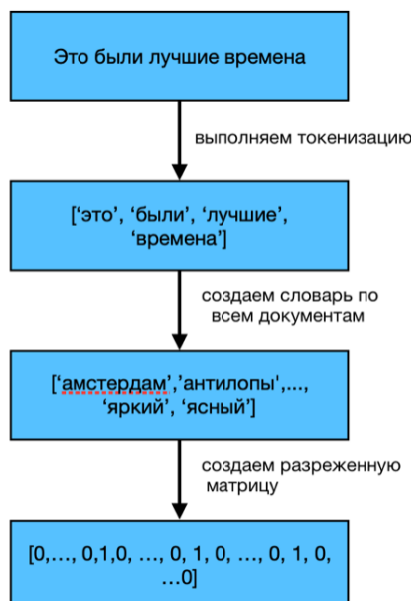


Рис. 1. Пример обработки текста методом «мешок слов»

Еще одним известным способом масштабирования данных является метод «частота термина – обратная частота документа» (*term frequency – inverse document frequency, tf-idf*). Метод основывается на следующей формуле [6]:

$$tfidf(t, d, D) = tf(t, d) \cdot idf(t, D), \quad (1)$$

где $tf(t, d)$ – частота слова, $idf(t, D)$ – обратная частота документа.

Рассмотрим каждый из двух показателей. Первый – частота слова (tf). Частота слова определяется как количество раз, которое слово встречается в документе из общего числа раз, когда все слова встречаются в этом документе [7]. Таким образом:

$$tf(t, d) = \frac{f_{t,d}}{\sum_{k \in d} f_{k,d}}, \quad (2)$$

где $f_{t,d}$ – количество появлений слова t в тексте d , а $\sum_{k \in d} f_{k,d}$ – общее число слов в этом же тексте.

Далее рассмотрим второй показатель – важность термина во всех документах (обратная частота документа, idf). Этот показатель рассчитывается по формуле (3) [7]:

$$idf(t, D) = \log \frac{|D|}{|\{d_i \in D : t \in d_i\}|}, \quad (3)$$

где $|D|$ – количество всех текстов, $|\{d_i \in D : t \in d_i\}|$ – число документов из D , в которых появляется слово t (когда $f_{t,d} \neq 0$).

Алгоритм *Word2Vec* работает на базе нейронных сетей, позволяет компьютеру понимать связь между словами в тексте и способна обучаться на больших наборах данных [8]. *Word2Vec* генерирует векторы, которые состоят из распределенных числовых характеристик слова, такие как контекст индивидуальных слов. Выход нейронной сети *Word2Vec* – это словарь, в котором каждому элементу соответствует вектор, который можно передать в алгоритм машинного обучения [9, 10]. В итоге было подготовлено 24 различных корпуса данных в векторной форме (по 8 каждым из трех методов векторизации), которые в дальнейшем могут быть поданы на вход алгоритмов машинного обучения.

Модели классификации

Было построено 72 различные модели классификации (по 24 варианта подготовки данных для каждого из трех алгоритмов). Обзор некоторых моделей представлен в таблице. Название каждого из корпусов будем закодировано следующим образом. Первый символ: T – означает использование моделей «мешок слов» и « $tf-idf$ », W – использование модели «*Word2Vec*». Второй символ равен 1, если используется удаление стоп-слов, иначе – 0. Третий символ равен 1, если используется лемматизация, иначе – 0. Четвертый символ равен 1, если используется удаление коротких слов, иначе – 0.

Обзор некоторых обученных моделей классификации

№ п/п	Название модели	Название модели в программе	Корпус данных для обучения	Метод векторизации корпуса
1	Логистическая регрессия	lr_cT111	dense_cvecT111	«мешок слов»
		lr_cT110	dense_cvecT110	
		lr_tfT111	dense_tfidfT111	«tf-idf»
		lr_tfT110	dense_tfidfT110	
		lr_W111	corpus_vectors_W111	«Word2Vec»
		lr_W110	corpus_vectors_W110	
2	Многослойный перцептрон	mlp_T111	dense_cvecT111	«мешок слов»
		mlp_T110	dense_cvecT110	
		mlp_tf_T110	dense_tfidfT110	
		mlp_W111	corpus_vectors_W111	«Word2Vec»
		mlp_W110	corpus_vectors_W110	
3	кближайших соседей	knn_cT111	dense_cvecT111	«мешок слов»
		knn_cT110	dense_cvecT110	
		knn_tf_T101	dense_tfidfT101	
		knn_tf_T001	dense_tfidfT001	
		knn_W111	corpus_vectors_W111	«Word2Vec»
		knn_W110	corpus_vectors_W110	

Оценка эффективности моделей

Следующий этап – выбор метрики качества для оценки эффективности моделей и выбора наилучшей. В каждой конкретной задаче выбирается та метрика, которая является более важной. В рассматриваемой задаче будет целесообразно рассмотреть метрику *recall*: она показывает, какую долю фишинговых писем модель правильно обнаружила. Чем выше *recall*, тем меньше фишинговых писем пропущено.

В ходе расчета метрик в качестве лучших были выбраны три модели: *lr_cT010* со значением метрики *recall* 0,9712, *mlp_T011* со значением метрики 0,9676 и *knn_tf_T011* со значением метрики 0,9712. Для оценки статистической значимости разницы между этими значениями был проведен дисперсионный анализ, который показал, что разница между этими значениями не существенна. Поэтому можно выбрать одну из этих моделей для построения приложения: была выбрана модель логистической регрессии *lr_cT010*.

Для оценки влияния наличия или отсутствия некоторых этапов предобработки на эффективность работы алгоритма был проведен дисперсионный анализ. Он показал, что способ векторизации имеет статистически значимое влияние на эффективность алгоритма.

Приложение для классификации писем

Для разработки приложения использовалась библиотека *Tkinter*. В нем был реализован следующий функционал:

- возможность выбора произвольного файла с текстом электронного письма (кнопка «Загрузка данных»);

– предсказание типа письма (фишинговое/безопасное) по выбранному файлу (кнопка «Прогноз»).

Приведем пример работы приложения на двух текстах – фишинговом и безопасном (рис. 2).

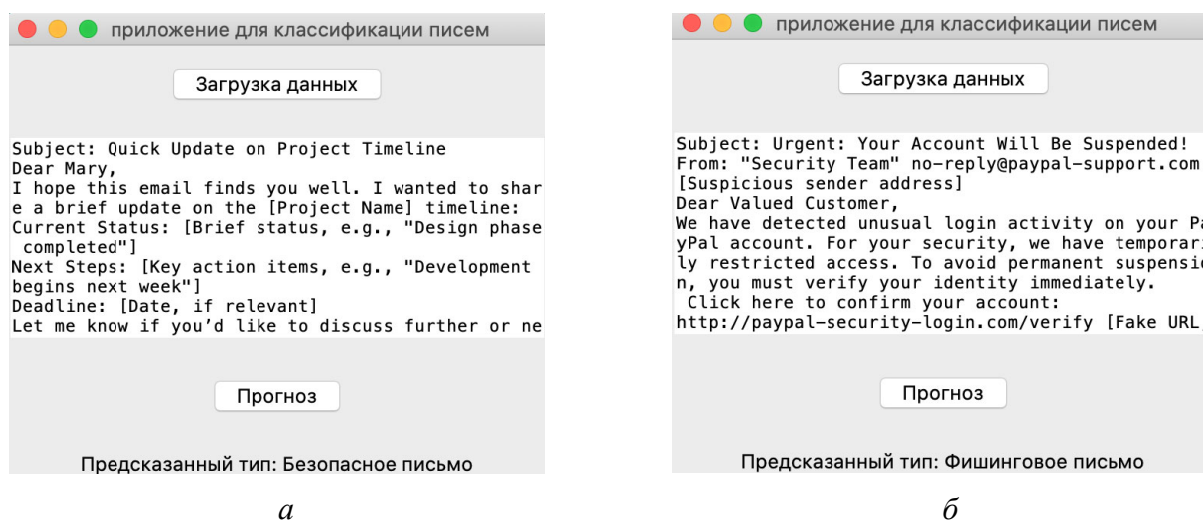


Рис. 2. Получение прогноза для: а – безопасного письма, б – фишингового письма

Выводы

Разработанный алгоритм машинного обучения показал высокую эффективность, значение метрики *recall* (полнота) оказалось равным 0,9712, в ходе проведения дисперсионного анализа было получено, что способ векторизации имеет статистически значимое влияние на эффективность алгоритма. Для моделей логистической регрессии также имеет статистическую значимость удаление стоп-слов или его отсутствие. Наилучшие значения метрики для модели логистической регрессии и модели многослойного перцептрона получены при использовании модели мешка слов, а для модели k ближайших соседей – при использовании модели «*tf-idf*».

Список литературы

1. Платонов, В. В. Технологии машинного обучения в кибербезопасности: учебное пособие. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. – 140 с. – ISBN 978-5-9729-2048-8 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/144586.html>.
2. Набор данных «Обнаружение фишинговых писем» / С. Чакраборти // Kaggle: Ваше сообщество по машинному обучению и науке о данных. – 2023. – DOI 10.34740/kaggle/dsv/6090437. – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/subhajournal/phishingemails>.
3. Рашка, С. Python и машинное обучение. Машинное и глубокое обучение с использованием Python, scikit-learn / С. Рашка, В. Мирджалили ; пер. с англ. Ю. Н. Артеменко. – Москва : Диалектика, 2020. – 576 с. – ISBN 978-5-907203-57-0.
4. Гвидо, С. Введение в машинное обучение с помощью Python / С. Гвидо, А. Мюллер. – Москва, 2016.
5. Запечников, С. В. Основы интеллектуального анализа данных и машинного обучения: конспект лекций : учеб. пособие. – Москва : Национальный исследовательский ядерный

университет «МИФИ», 2022. – 136 с. – ISBN 978-5-7262-2856-3 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/132687.html>.

6. Теория и практика машинного обучения: учебное пособие / В. В. Воронина, А. В. Михеев, Н. Г. Ярушкина, К. В. Святков. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2017. – 291 с. – ISBN 978-5-9795-1712-4 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/106120.html>.

7. *Целых, А. Н.* Выявление инцидентов информационной безопасности и мошеннических транзакций методами машинного обучения: учебное пособие / А. Н. Целых, Э. М. Котов. – Ростов-на-Дону, Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2023. – 116 с. – ISBN 978-5-9275-4515-5 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/138009.html>.

8. *Целых, А. Н.* Извлечение знаний методами машинного обучения : учеб. пособие по курсам «Модели и методы инженерии знаний», «Методы машинного обучения» / А. Н. Целых, Э. М. Котов. – Ростов-на-Дону, Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2022. – 105 с. – ISBN 978-5-9275-4215-4 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/131448.html>.

9. *Чио, К.* Машинное обучение и безопасность / К. Чио, Д. Фримэн; пер. А. В. Снастин. – Москва : ДМК Пресс, 2020. – 388 с. – ISBN 978-5-97060-713-8 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/126237.html>.

10. *Пылов, П. А.* Основы работы с моделями машинного и глубокого обучения: учебное пособие / П. А. Пылов, Р. В. Майтак, А. В. Дягилева. – Москва ; Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. – 256 с. – ISBN 978-5-9729-1547-7 // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/133369.html>.

Факторы и прогноз валового регионального продукта на основе данных по Удмуртской Республике

Д. Д. Вавилова, Р. Зерари

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В статье исследовано влияние различных производственных, демографических, социально-экономических и внешнеэкономических факторов на величину и динамику валового регионального продукта (ВРП) Удмуртской Республики (УР). На основе официальных статистических данных за период 2000–2023 гг. были построены различные математические модели динамики ВРП УР. Наилучшей точностью на участке ретропрогноза обладает логарифмическая регрессионная модель динамики ВРП с шестью факторами (средняя относительная ошибка составила 3,5 %); эта модель использована для построения прогноза ВРП до 2030 года.

Ключевые слова: валовой региональный продукт, факторы, корреляционно-регрессионный анализ, моделирование, прогнозирование.

Введение

Понимание и прогнозирование экономических процессов является одной из ключевых задач современной науки. Для достижения этой цели широко используются методы математического моделирования, позволяющие формализовать сложные взаимосвязи и выявлять закономерности развития. При построении таких моделей важно учитывать многообразие факторов, влияющих на исследуемый показатель, и находить адекватные способы их описания [1].

В контексте региональной экономики, особый интерес представляет анализ динамики валового регионального продукта (ВРП). Величина и изменение ВРП определяются целым спектром взаимосвязанных факторов. Как показывают теоретические исследования [2, 3], к таким факторам относятся демографические и социальные характеристики региона, а также показатели состояния и использования производственных ресурсов. Однако для построения адекватных моделей динамики ВРП необходимо также учитывать его структуру, уровень платежеспособного спроса населения и активность региона во внешнеэкономической сфере [4].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния этих разнообразных факторов на величину и динамику ВРП. В рамках данного исследования проводится анализ статистических данных одного из регионов России – Удмуртской Республики – с целью выявления наиболее значимых взаимосвязей и построения наиболее точной модели, описывающей динамику ВРП.

Группировка факторов, влияющих на величину и динамику ВРП

В результате логического и теоретического анализа предлагается рассматривать пять групп факторов, влияющих на величину и динамику ВРП. Выполненная в ходе исследования группировка факторов показана на рис. 1.

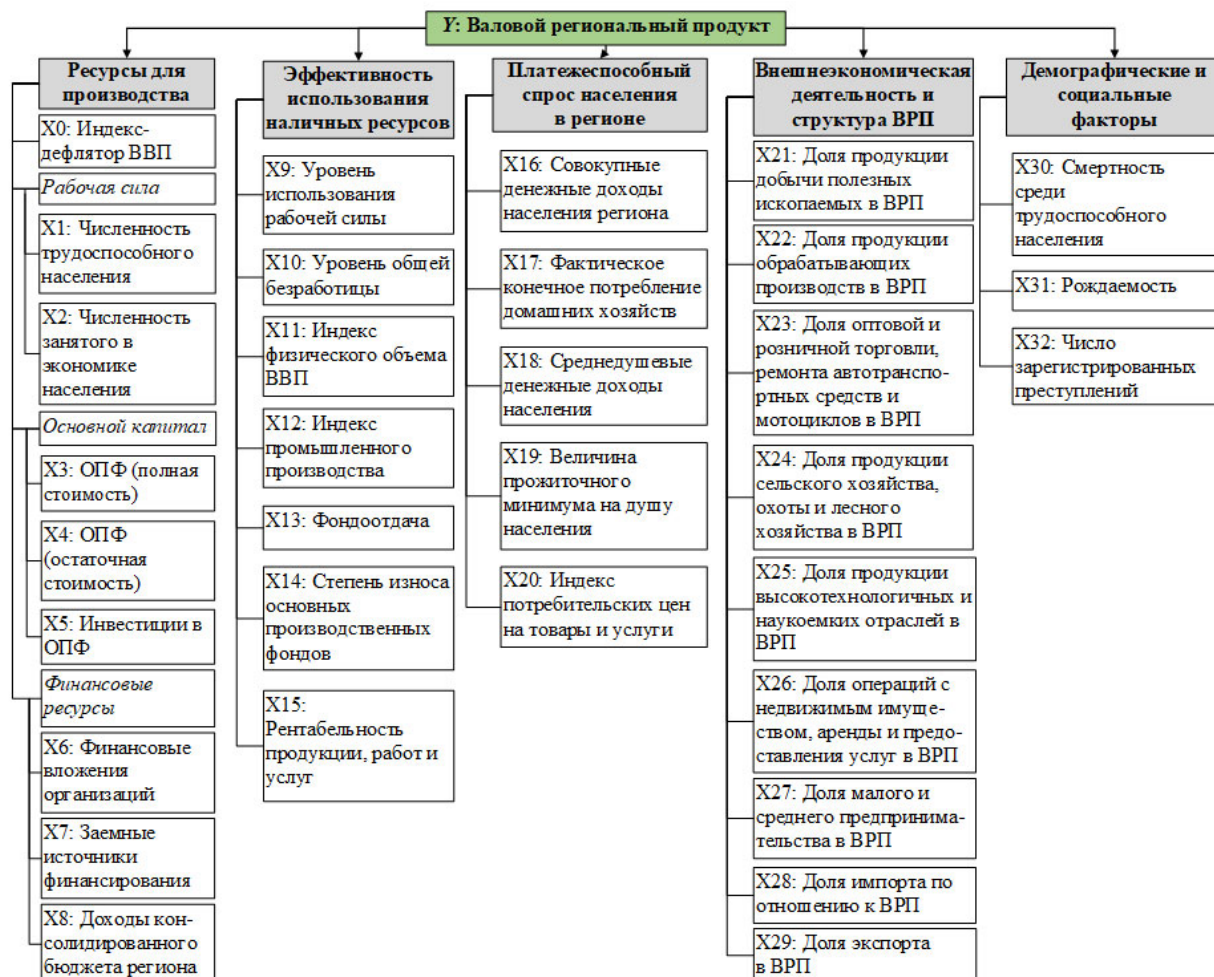


Рис. 1. Группировка факторов, влияющих на величину и динамику ВРП

Каждая из пяти групп факторов, представленная на рис. 1, отражает набор статистических данных, которые характеризуют конкретные показатели. Набор данных может быть расширен и дополнен. В этом исследовании анализируется влияние 33 показателей (X0–X32) на ВРП Y . Собранный массив статистических данных Удмуртской Республики [5, 6] содержит данные по величине ВРП (Y) и показателям (X0–X32) за период 2000–2023 годов, т. е. имеется 24 наблюдения по каждому фактору. Таким образом, для последующего корреляционно-регрессионного анализа используется массив данных размерностью 33×24 . Анализ выполняется с помощью математических методов, встроенных в среду разработки GoogleColab, на языке программирования Python.

Корреляционный анализ: построение корреляционной матрицы

На основе статистических данных выполняется корреляционный анализ между ВРП и показателями, выступающими факторами его изменения. Первоначально все денежные величины в массиве исходных данных были пересчитаны в ценах базового 2023 года. Далее в целях масштабируемости все рассматриваемые факторы были приведены к одному стандартному виду [7] с использованием формулы, учитывающей среднее значение показателя и его среднеквадратическое отклонение. Далее был выполнен расчет коэффициентов парной линейной корреляции Пирсона [8]:

$$r_{YX_i} = \frac{\overline{Y \cdot X_i} - \overline{Y} \cdot \overline{X_i}}{\sigma(Y) \cdot \sigma(X_i)}; \quad (1)$$

$$r_{X_j X_i} = \frac{\overline{X_j \cdot X_i} - \overline{X_j} \cdot \overline{X_i}}{\sigma(X_j) \cdot \sigma(X_i)}; \quad (2)$$

где \overline{Y} – среднее значение по Y ; $\overline{X_i}$ – среднее значение по фактору X_i ; $\sigma(Y)$ – среднеквадратическое отклонение Y ; $\sigma(X_i)$ – среднеквадратическое отклонение по фактору X_i .

Диаграмма парных коэффициентов корреляции между изучаемыми показателями представлена на рис. 2.

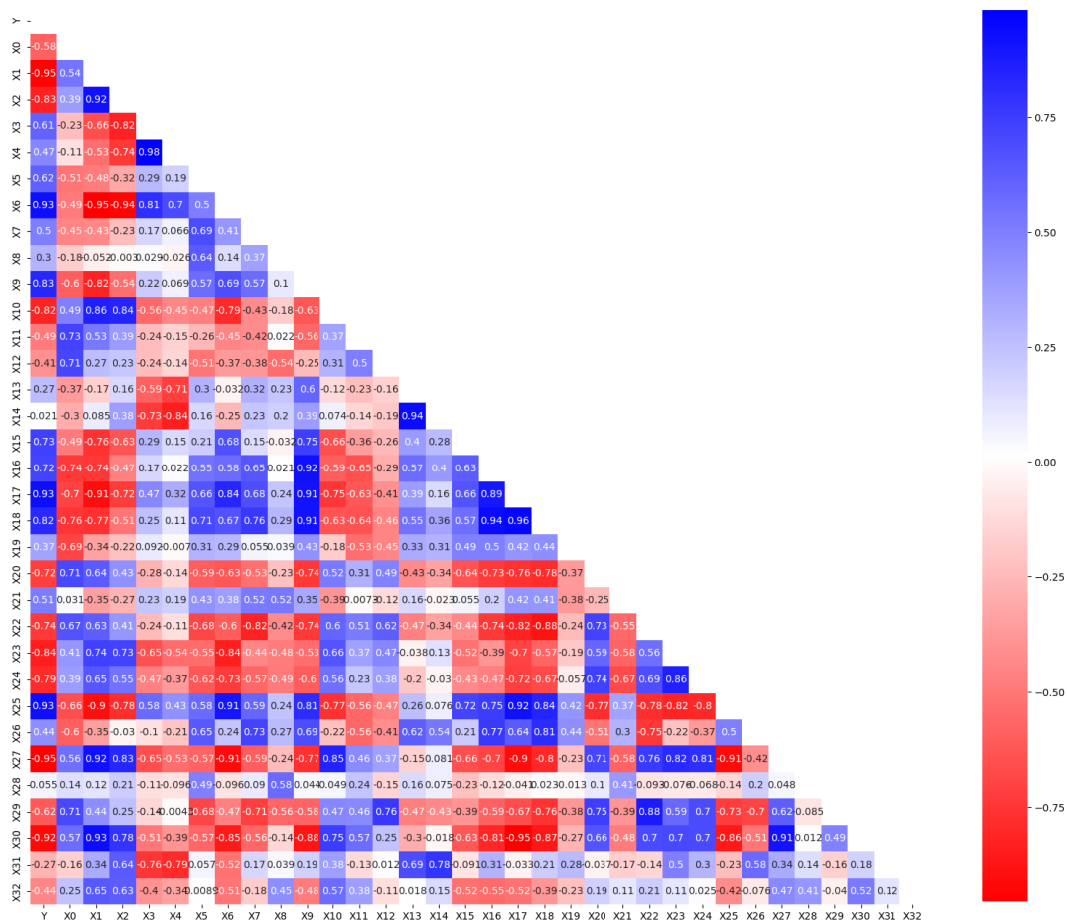


Рис. 2. Диаграмма парных коэффициентов корреляции

Первая группа факторов, включающая ресурсы для производства товаров и услуг, имеет наибольшую положительную корреляцию с ВРП. Финансовые вложения организаций (X6) и инвестиции в основные средства (X5) оказывают наибольшее положительное влияние на ВРП.

Из второй группы наиболее сильное влияние на ВРП оказывает рабочая сила (X9) и рентабельность (X15). Выявлена отрицательная зависимость между ВРП и количеством занятых в экономике (X2).

Из факторов третьей группы наибольшее влияние на ВРП оказывает величина конечного потребления домашних хозяйств (X17). Увеличение совокупного денежного дохода (X16) и среднедушевого денежного дохода в регионе (X18) также положительно сказывается на росте ВРП. Высокий коэффициент парной корреляции Пирсона указывает на отрицательную взаимосвязь между ВРП и индексом потребительских цен на товары и услуги (X20).

Из четвертой группы, отражающей внешнеэкономическую деятельность и структуру ВРП, наибольший показатель корреляции зафиксирован между ВРП и долей высокотехнологичной продукции (X25).

Из пятой группы, демографических и социальных факторов, наиболее сильно ВРП зависит от смертности среди трудоспособного населения в регионе (X30).

Корреляционный анализ позволяет выявить линейные зависимости между ВРП и его факторами, в то время как графический анализ помогает визуализировать нелинейные взаимосвязи.

В ходе дополнительного графического исследования выявлено, что в первой группе ресурсов для производства товаров и услуг наблюдаются нелинейные связи между ВРП и такими показателями, как численность трудоспособного населения (X1), численность занятого в экономике (X2), остаточная стоимость основных фондов (X4) и финансовые вложения организаций (X6).

Во второй группе, отражающей эффективность использования ресурсов, установлена нелинейная зависимость ВРП от уровня общей безработицы (X10), индекса физического объема ВВП (X11) и рентабельности предприятий (X15).

В третьей группе платежеспособного спроса населения обнаружено, что ВРП нелинейно связано с совокупными денежными доходами населения (X16) и среднедушевыми денежными доходами (X18).

В четвертой группе наблюдается линейная связь между ВРП и долей высокотехнологичной продукции (X25), а также с долей малого и среднего предпринимательства (X27). Нелинейные зависимости также присутствуют с показателями структуры ВРП: (X22), (X24), (X26) и (X29).

В группе демографических и социальных факторов установлена нелинейная связь между ВРП и показателями рождаемости (X31) и числом зарегистрированных преступлений (X32).

Проведенный анализ демонстрирует, что различные группы факторов оказывают как линейное, так и нелинейное влияние на величину и динамику ВРП.

Регрессионное моделирование: подбор наилучшей модели прогноза

Настоящее исследование включало построение 25 математических моделей, в том числе производственных функций. Среди них была рассмотрена широко известная функция Кобба – Дугласа и ее модификации [9]. Анализ производственных функций показал высокую ошибку аппроксимации, поэтому они не упоминаются в этой работе.

Построение математических моделей осуществлялось с использованием обучающего набора данных за период 2000–2015 гг. и тестового набора – участка ретроспективного прогнозирования – для периода 2016–2023 гг.

Для выбора лучшей математической модели прогноза был выполнен расчет показателей коэффициента детерминации модели и средней ошибки аппроксимации как на участке ретропрогноза, так и в целом на обучающем множестве по формулам [10]:

- коэффициент детерминации модели:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^N (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (\hat{Y}_t - Y_t)^2}{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2}; \quad (3)$$

- средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{\hat{Y}_t - Y_t}{Y_t} \right| \cdot 100\%; \quad (4)$$

здесь N – количество наблюдений обучающего множества Ω ; \hat{Y}_t – значение уровня ряда в момент времени t , рассчитанное по модели; \bar{Y} – среднее значение уровня ряда.

Наилучшей среди всех построенных моделей оказалась регрессионная модель динамики логарифмического типа:

$$\hat{Y} = -8405,73 + 512,81 \cdot \ln(X_1) + 776,98 \cdot \ln(X_4) + 862,14 \cdot X_{13} + \\ + 170,04 \cdot \ln(X_{14}) - 47,23 \cdot \ln(X_{26}) - 30,62 \cdot X_{27}. \quad (5)$$

Модель (5) обладает наилучшим ретропрогнозом, поскольку она имеет наименьшую среднюю относительную ошибку, равную 3,5 %, среди всех моделей. На рис. 3 представлен ретропрогноз ВРП УР на период 2016–2023 гг. по логарифмической модели (5).

Чтобы построить прогноз ВРП, основываясь на модели (5), требуется обладать информацией о прогнозной динамике шести факторов, включенных в нее: $\ln(X_1)$, $\ln(X_4)$, X_{13} , $\ln(X_{14})$, $\ln(X_{26})$, X_{27} . Для прогноза факторов, влияющих на ВРП, были подобраны модели авторегрессии первого и второго порядка. Наш анализ показал, что модель авторегрессии первого порядка является наиболее подходящей для прогнозирования факторов X_{13} , X_{27} и $\ln(X_{26})$. Для остальных факторов $\ln(X_1)$, $\ln(X_4)$ и $\ln(X_{14})$ наилучшее соответствие модельных значений к их реальным обеспечили модели авторегрессии второго порядка.

Прогнозная динамика этих шести факторов позволяет получить прогноз ВРП. Конечный результат прогноза ВРП УР до 2030 г. представлен в ценах 2023 г. – на рис. 4, в текущих ценах (с учетом планируемой ставки инфляционных процессов на уровне 5% от ЦБ РФ) – на рис. 5.

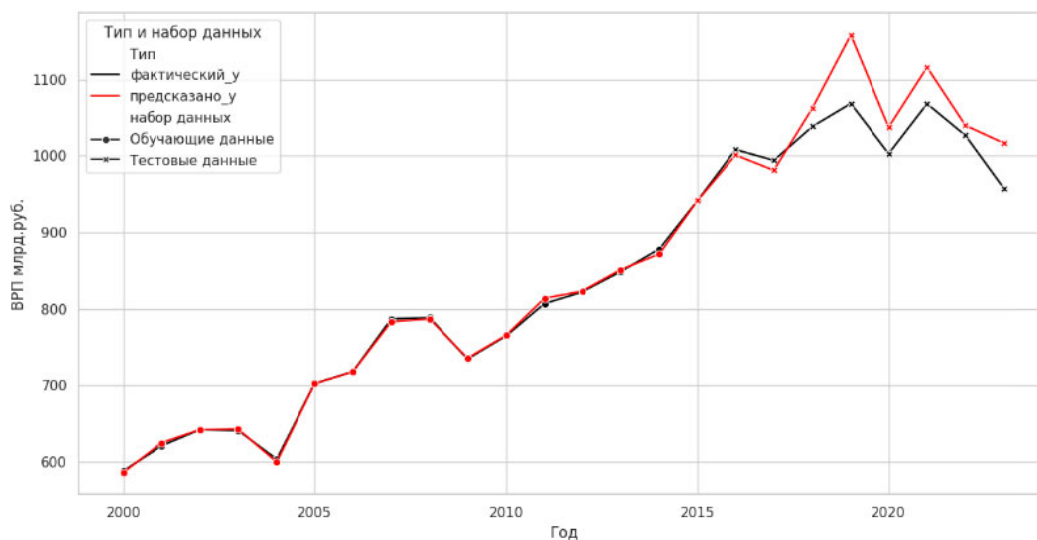


Рис. 3. Ретропрогноз ВРП УР на период 2016–2023 гг. в ценах 2023 года по модели (5)

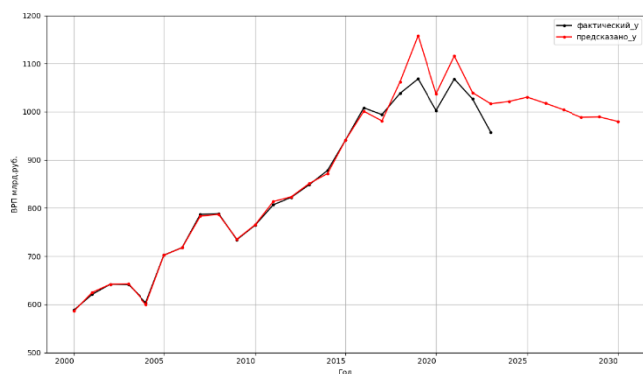


Рис. 4. Прогноз ВРП УР до 2030 года в ценах 2023 года по модели (5)

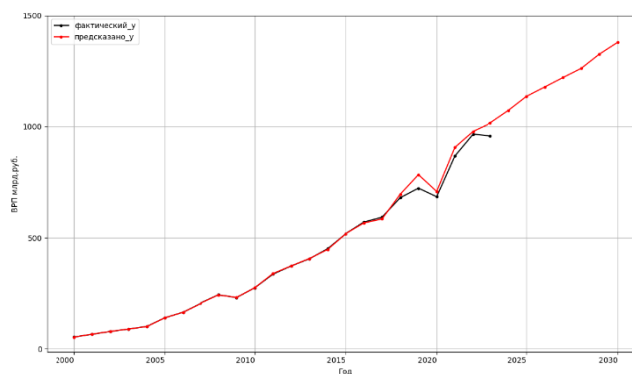


Рис. 5. Прогноз ВРП УР до 2030 года в текущих ценах по модели (5)

Таким образом, ВРП УР в 2025 г. ожидается на уровне 1030,34 млрд руб. (в сопоставимых ценах 2023 г.), что на 7,6 % больше, чем в 2023 г. Далее, в течение 2026–2028 гг. прогнозируется 1%-е ежегодное снижение ВРП в сопоставимых ценах. К концу 2030 г. величина ВРП УР в ценах 2023 г. будет на уровне 978,7 млрд руб. Что касается прогноза ВРП УР в текущих ценах, то можно сказать, что значение ВРП будет ежегодно расти. К 2030 г. оно достигнет 1378,9 млрд руб., что означает увеличение величины ВРП в 1,5 раза по сравнению с его значением в 2023 г., которое составляло 957,4 млрд руб.

Выводы

1. В рамках исследования проведен корреляционный анализ социально-экономических показателей региона и построены поля корреляции для выявления наиболее значимых факторов, влияющих на динамику ВРП.

2. Проведенный корреляционный и графический анализ показал различное влияние факторов на ВРП в УР. В итоге в целях прогнозирования была выбрана логарифмическая регрессионная модель с факторами $\ln(X_1)$, $\ln(X_4)$, X_{13} , $\ln(X_{14})$, $\ln(X_{26})$, X_{27} , которая продемонстрировала лучшую точность на участке ретропрогноза (средняя относительная ошибка 3,5 %). Этот подход подтверждает важность определения вида зависимостей от значимых факторов для точного прогнозирования результирующего показателя.

3. Анализ прогнозной динамики ВРП показывает, что к концу 2030 г. ожидается величина ВРП УР в ценах 2023 г. на уровне 978,7 млрд руб., что будет соответствовать 1378,9 млрд руб. в текущих ценах 2030 г.

Список литературы

1. *Базилевский, М. П.* Оптимизационные задачи отбора информативных регрессоров в линейной регрессии с контролем её значимости по критерию Фишера // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2024. – № 6 (122). – С. 200–207.

2. *Кутышкин, А. В.* Моделирование динамики валового регионального продукта // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2021. – Т. 21, № 2. – С. 104–113.

3. *Vavilova D., Zerari R.* Economic development in Algeria and Russia's average region: comparative analysis of dynamics and production functions // The EUrASEANs: Journal on Global Socio-Economic Dynamics. – 2025. – № 2 (51). – С. 7–18.

4. *Афанасьев, М. Ю.* Экономическая сложность и вложенность структур региональных экономик / М. Ю. Афанасьев, А. В. Кудров // Экономика и математические методы. – 2021. – № 3. – С. 67–78.

5. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистике при Удмуртской Республике. – URL: <https://18.rosstat.gov.ru/ofstatistics>.

6. Министерство финансов Удмуртской Республики. – URL: <https://www.mfur.ru/budjet/ispolnenie/otchet/index.php>.

7. *Черепанова, А. С.* Эконометрическое моделирование влияния фактора материнского капитала на уровень рождаемости в регионе // Интеллектуальные системы в производстве. – 2023. – Т. 21, № 2. – С. 58–68.

8. *Кетова, К. В.* Исследование влияния демографических, социально-экономических, медико-биологических, экологических, этнических факторов на рождаемость // Социально-экономическое управление: теория и практика. – 2024. – Т. 20, № 1. – С. 26–35.

9. *Файзуллин, Р. В.* Сценарии развития рынка труда России с учетом оценки влияния искусственного интеллекта: отраслевой разрез / Р. В. Файзуллин, П. Л. Отоцкий // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. – 2025. – Т. 18, № 1. – С. 170–189.

10. *Вавилова, Д. Д.* Информационно-аналитическая система анализа региональных социально-экономических процессов на основе комплексного использования динамических моделей различных типов / Д. Д. Вавилова, К. В. Кетова // Прикладная информатика. – 2023. – Т. 18, № 4 (106). – С. 97–110.

Статистическое моделирование и прогноз уровня спортивной подготовки населения в Российской Федерации

И. В. Васильева, М. Е. Дюндик

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Работа посвящена анализу и прогнозу показателей физической подготовки населения в Российской Федерации. Статистическая база исследования содержит годовые данные о показателях рынка труда РФ за период 2000–2023 гг. В работе выполнена программная реализация алгоритма решения задачи прогноза динамики показателей физической подготовки населения с использованием дистрибутива Jupyter Notebook на современном языке программирования Python. Выбрана модель прогнозирования и построена прогнозная динамика основных показателей физической подготовки населения в РФ на период до 2035 г.

Ключевые слова: спортивная подготовка, физическая культура, моделирование, факторный анализ, интегральный индекс.

Введение

Физическая культура и спорт являются важнейшими составляющими формирования человеческого капитала и здорового образа жизни. Они выполняют не только оздоровительную, но и социально-экономическую функцию, способствуя росту активности населения, снижению заболеваемости, укреплению трудового потенциала и улучшению качества жизни. В современных условиях спортивная активность рассматривается как один из индикаторов социального благополучия, напрямую влияющий на устойчивость и развитие общества [1].

Многочисленные исследования подтверждают, что регулярные занятия спортом положительно влияют на физическое и психологическое состояние личности, снижая риски хронических заболеваний и повышая производительность труда [2]. При этом на уровень спортивной подготовки населения воздействует совокупность факторов: от уровня удовлетворенности условиями и доступности спортивной инфраструктуры до объема государственного финансирования и общего состояния здоровья нации.

Однако, несмотря на значимость этих процессов, до сих пор не существует единой общепринятой методики количественной оценки уровня спортивной подготовки населения. Это существенно затрудняет выработку эффективных управленческих решений, направленных на развитие физической культуры и спорта в стране. Проблема усугубляется региональными различиями в обеспеченности инфраструктурой, неравномерностью демографических показателей и различиями в уровнях вовлеченности населения в физическую активность

[3, 4]. Также такие расчеты необходимы для построения интегральных показателей состояния здоровья населения [5, 6].

Для решения этой задачи в данной работе предложено использование инструментов многомерной статистики, в частности индексного подхода и метода главных компонент (РСА), которые позволяют агрегировать разнородные показатели в единый интегральный индекс, отражающий уровень спортивной подготовки населения. Такой подход уже нашел успешное применение при оценке других синтетических социальных категорий, таких как качество жизни, здоровье и человеческий капитал.

Целью настоящей работы является статистическое моделирование и анализ влияния факторов на уровень спортивной подготовки населения Российской Федерации, а также построение прогноза интегрального показателя до 2035 г.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Сбор и обработка официальных статистических данных, отражающих физическую активность и инфраструктурные условия.

2. Формирование и расчет интегрального показателя на основе нормализованных частных факторов.

3. Применение метода главных компонент для выявления ключевых переменных и снижения размерности модели.

4. Прогнозирование уровня спортивной подготовки населения с использованием современных методов анализа временных рядов.

Математическая реализация модели выполнена на языке Python с использованием библиотек для анализа данных и построения прогностических моделей. Информационной основой послужили данные официальной статистики РФ [5–11].

Практическая значимость исследования заключается в возможности применения разработанного инструментария при мониторинге и корректировке федеральных и региональных программ, направленных на развитие физической культуры и спорта. Полученные результаты могут быть использованы органами государственной власти и профильными ведомствами при разработке управленческих решений, а также в образовательной и научной среде.

Материалы и методы

Материалами исследования выступают официальные статистические данные, размещенные на сайтах Министерства спорта Российской Федерации, Федеральной службы государственной статистики, Федерального казначейства, а также данные мониторинга удовлетворенности населения условиями для занятий физической культурой и спортом [7–13].

В качестве основы для оценки уровня спортивной подготовки населения используется интегральный показатель, формируемый на базе частных факторов, отражающих ключевые характеристики физической активности, инфраструктуры и здоровья. Основу методологии составляет индексный подход, предполагающий свертку нормированных показателей в единый агрегированный индекс. Структура интегрального показателя формализована выражением:

$$y = \sum_{j=1}^p w_j \tilde{x}^{(j)}, \quad (1)$$

где y – интегральный показатель уровня спортивной подготовки населения; $\tilde{x}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, p$) – факторы, входящие в интегральный показатель и измеренные в унифицированной шкале; w_j ($j = 1, 2, \dots, p$) – удельные веса факторов, определяемые из условия максимизации информативности интегрального индикатора y .

Для оценки интегрального показателя уровня спортивной подготовки населения используется линейная комбинация частных критериев/факторов вида:

$$Y_{\text{sport}} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{x_j - \min_j}{\max_j - \min_j} \quad (2)$$

где Y_{sport} – уровень спортивной подготовки населения; x_j – фактическое значение j -го фактора; \max_j и \min_j – максимальное и минимальное значение j -го показателя за анализируемый период; w_j – весовой коэффициент j -го фактора.

Результаты анализа и моделирования динамики показателей физической подготовки населения РФ

Будем рассматривать следующие факторы, входящие в интегральный показатель: X_1 – процент населения, систематически занимающегося физической культурой и спортом, в общей численности населения; X_2 – процент населения, сдавших нормы физкультурно-спортивного комплекса «Готов к труду и обороне» (ГТО), в общей численности населения; X_3 – процент населения, не имеющего проблемы со здоровьем, препятствующих занятию спорта, в общей численности населения; X_4 – процент населения, удовлетворенного созданными условиями для занятий физической культурой и спортом, в общей численности населения; X_5 – государственное финансирование физической культуры и спорта в расчете на одного жителя страны, тыс. руб. на 1 чел. в год; X_6 – количество спортивных учреждений, предназначенных для проведения занятий физической культурой и оздоровительных мероприятий, в расчете на одного жителя страны, ед. на 1 чел. в год. Табл. 1 построена по данным [7–13] и представлена с шагом 5 лет. В расчетах интегрального показателя оценки уровня спортивной подготовки по формуле (2) принято, что $w_j = 1/6$, то есть вклад каждого фактора одинаковый.

Таблица 1. Значения факторов, входящих в интегральный показатель

Год	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
2000	10,1	0	60,8	25,7	311,8	0,0013
2005	12,5	0	59,4	29,8	891,6	0,0015
2010	19,6	0	56,4	34,5	1833,2	0,0017
2015	31,7	0,14	56,9	43,6	2568,7	0,0019
2020	45,4	0,62	58,1	55,0	3249,4	0,0023

2023	52,1	1,32	54,0	63,3	3292,7	0,0024
------	------	------	------	------	--------	--------

По табл. 2 можно заметить, что некоторые факторы имеют сильную связь между собой. С помощью алгоритма метода главных компонент найдены признак-комбинации и несколько признаков выражены одним новым (табл. 3).

Таблица 2. Кросскорреляционные зависимости между факторами

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
X ₁	1	0,88	-0,55	0,99	0,90	0,97
X ₂	0,88	1	-0,29	0,88	0,69	0,82
X ₃	-0,55	-0,29	1	-0,60	-0,80	-0,67
X ₄	0,99	0,88	-0,60	1	0,92	0,99
X ₅	0,90	0,69	-0,80	0,92	1	0,96
X ₆	0,97	0,82	-0,67	0,99	0,96	1

Компонент 1 – показатель доли населения, систематически занимающегося физической культурой и спортом и удовлетворенного созданными условиями для занятий физической культурой и спортом, сдавших нормы физкультурно-спортивного комплекса «Готов к труду и обороне» (ГТО), в общей численности населения.

Компонент 2 – показатель гос. финансирования, тыс. руб./чел. в год и кол-во спортивных учреждений, в расчете на одного жителя страны, ед. на 1 чел. в год.

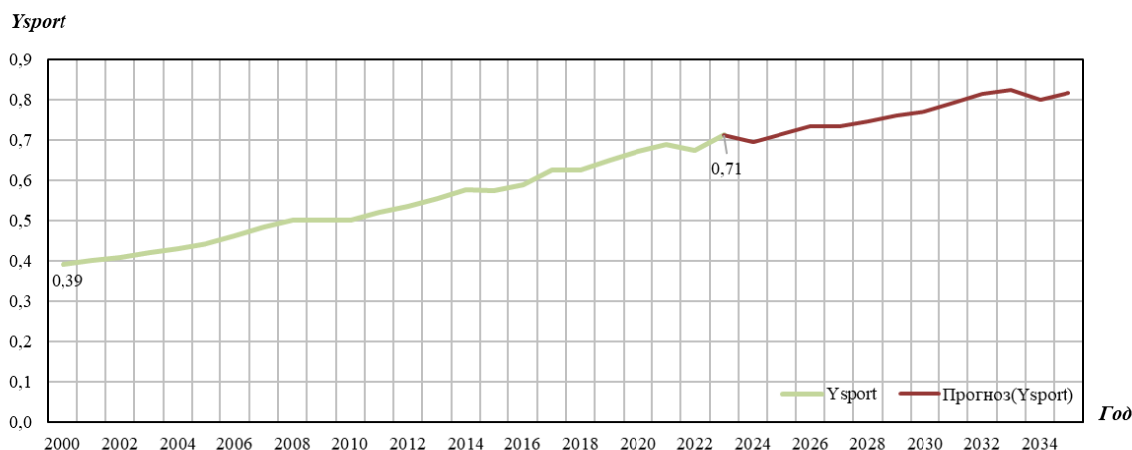
Компонент 3 – показатель доли населения, не имеющего проблем со здоровьем, препятствующих занятию спортом, в общей численности населения.

Таблица 3. Компоненты и интегральный индекс

Год	Компонент 1	Компонент 2	Компонент 3	Y _{sport}
2000	0,41	0,16	0,61	0,39
2002	0,41	0,21	0,60	0,41
2004	0,42	0,27	0,60	0,43
2006	0,43	0,38	0,58	0,46
2008	0,45	0,48	0,57	0,50
2010	0,47	0,47	0,56	0,50
2012	0,50	0,55	0,56	0,54
2014	0,53	0,63	0,56	0,58
2016	0,57	0,63	0,57	0,59
2018	0,61	0,70	0,57	0,63
2020	0,63	0,80	0,58	0,67
2021	0,66	0,87	0,54	0,69
2023	0,68	0,89	0,56	0,71

На рисунке предоставлена фактическая динамика и прогноз интегрального показателя уровня спортивной подготовки населения РФ до 2035 г.

Для прогнозирования интегрального индекса оценки уровня спортивной подготовки населения РФ использовался метод экспоненциального сглаживания. Суть метода заключается в том, что старые данные имеют меньший вес, чем новые. Изменение веса по новизне или старине данных происходит по экспоненциальной кривой.



Фактическая динамика и прогноз интегрального показателя уровня спортивной подготовки населения РФ до 2035 г.

В ходе статистического моделирования и исследования было выяснено, что интегральный показатель уровня спортивной подготовки населения в РФ за рассматриваемый период вырос с 0,39 в 2000 г. до 0,71 в 2023 г. Прогнозируется рост интегрального показателя, к 2035 г. он будет составлять 0,82. Рост интегрального индекса оценки уровня спортивной подготовки населения РФ, безусловно, является положительным явлением. Это говорит об увеличивающейся вовлеченности населения в занятия спортом и способствует здоровому образу жизни.

Список литературы

1. Сафоев, Х. Физическая культура и спорт как факторы развития человеческого капитала фирмы // Тенденции развития науки и образования. – 2020. – № 62-6. – С. 84–86.
2. Дмитриева, А. С. Влияние спорта на жизнь и здоровье человека. Физическая активность, как основное направление развитие здорового общества / А. С. Дмитриева, В. И. Пахомов // Наука. – 2021. – № 7. – С 45–50.
3. Кетова, К. В. Структурно-динамический анализ составляющей здоровья человеческого капитала / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова // Статистика и экономика. – 2021. – № 1. – С. 54–66.
4. Структурно-динамический анализ уровня здоровья трудоспособной группы населения: региональный аспект / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова, М. С. Кузьмин, А. В. Корепанова // Социально-экономическое управление: теория и практика. – 2021. – № 1 (44). – С. 3–12.

5. *Кетова, К. В.* Построение индекса здоровья населения экономической системы региона / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова // *Дневник науки*. – 2021. – № 1 (49). – С. 46.
6. *Кетова, К. В.* Индекс здоровья населения экономической системы: региональный аспект / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова // *StudNet*. – 2021. – Т. 4, № 1. – С. 125.
7. Общая численность инвалидов. – URL: <https://www.fedstat.ru/indicator/33818> (дата обращения 04.05.2025).
8. Заболеваемость населения. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/13721> (дата обращения 09.05.2025).
9. Численность населения РФ, принявшего участие в выполнении нормативов Всероссийского физкультурно-нормативного комплекса ГТО. – URL: <https://www.fedstat.ru/indicator/33818> (дата обращения 04.05.2025).
10. Доля граждан, систематически занимающихся физической культурой и спортом. – URL: <https://www.fedstat.ru/indicator/61635> (дата обращения 01.05.2025).
11. Государственное финансирование физической культуры и спорта. – URL: <https://roskazna.gov.ru> (дата обращения 25.04.2025).
12. Количество спортивных сооружений. – URL: <https://www.fedstat.ru/indicator/36278> (дата обращения 12.02.2025).
13. Населения, удовлетворенного созданными условиями для занятий физической культурой и спортом. – URL: <http://minsport.gov.ru/documents/federal-laws> (дата обращения 12.03.2025).

Анализ и моделирование динамики показателей рынка труда в Российской Федерации

К. М. Давлетшина, М. С. Кузьмин, А. В. Корепанова

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Работа посвящена анализу и прогнозу показателей рынка труда в Российской Федерации. Статистическая база исследования содержит годовые данные о показателях рынка труда РФ за период 2000–2024 гг. В работе выполнена программная реализация алгоритма решения задачи прогноза динамики показателей рынка труда с использованием дистрибутива Jupyter Notebook на современном языке программирования Python. Выбраны модели прогнозирования и построены прогнозные динамики основных показателей рынка труда в РФ на период до 2035 г.

Ключевые слова: рынок труда, трудовые ресурсы, занятость населения, моделирование, прогноз.

Введение

Рынок труда является неотъемлемой частью социальной системы, состояние которой влияет на темпы экономического роста государства. Его характеризуют такие показатели, как численность трудовых ресурсов, уровень занятости населения, уровень безработицы и т. д. От уровня и динамики показателей рынка труда зависит основополагающий фактор социума – качество жизни населения [1, 2].

Моделированию показателей рынка труда в РФ посвящено большое количество публикаций. Так, например, в статье Ш. Э. Миришли и Н. Д. Романова [3] выделены методы комплексного прогноза развития региона, включающие в том числе показатели рынка труда. Другие исследователи, А. Б. Гармаев и А. Ю. Лосева [4], описывают существующие методы имитационного моделирования, их достоинства и недостатки по сравнению с другими методами, которые могут быть применены в целях моделирования и прогнозирования ситуаций на рынке труда. Такие авторы, как А. В. Речинский, Л. В. Черненькая, А. В. Черненький [5], рассматривают основы математические моделирования, описывают этапы построения и особенности реализации имитационного моделирования, в том числе для социально-экономических процессов.

Основным показателем, с помощью которого производится оценка потенциала и состояния рынка труда, является численность трудовых ресурсов. К трудовым ресурсам относится население, занятое экономической деятельностью, а также способное трудиться, но временно не работающее по различным причинам (безработные, студенты, лица в отпуске по уходу за ребенком и др.) [6].

Актуальность изучения трудовых ресурсов обусловлена тем, что демографические тенденции в виде старения населения, снижения рождаемости, динамики миграционных изменений напрямую влияют на объем и качество трудовых ресурсов, а значит, на экономическую стабильность и конкурентоспособность государства [7].

Моделирование и прогнозирование динамики трудовых ресурсов – одна из наиболее трудоемких и актуальных задач современной цифровой экономики. Точное предсказание будущих трендов на рынке труда критически важно для принятия решений как на региональном уровне, так и на федеральном. Невозможно построить надежный прогноз, не имея детального и достоверного описания текущего состояния рынка труда. Для этого используются разнообразные методы, начиная от простых статистических моделей и заканчивая сложными алгоритмами машинного обучения [8].

Естественным ограничителем как численности трудовых ресурсов, так и темпов экономического роста выступают демографические параметры страны или региона, выраженные, прежде всего, в численности постоянного населения, его возрастной структуре и миграционной динамике.

Целью работы является анализ и моделирование динамики основных показателей рынка труда в РФ для построения прогноза их развития до 2035 года.

Цель достигается за счет последовательного решения задач:

- 1) сбор и обработка статистических данных показателей рынка труда в РФ в целях анализа текущей ситуации;
- 2) программная реализация методики расчета численности трудовых ресурсов с использованием уравнения демографической динамики;
- 3) построение прогноза показателей рынка труда в РФ до 2030 года

Программная реализация анализа статистических данных и построения математических моделей выполняется с использованием дистрибутива Jupyter Notebook на современном языке программирования Python.

Практическая значимость заключается в возможности применения полученных результатов для разработки государственных программ занятости, а также кадровых стратегий предприятий в условиях меняющегося рынка труда.

Таким образом, работа позволит не только оценить будущую динамику трудовых ресурсов, но и выявить ключевые риски для устойчивого развития экономики России в среднесрочной перспективе.

Материалы и методы

Материалами исследования выступают официальные данные Федеральной службы государственной статистики, а также Министерства труда и социальной защиты РФ [9–11].

С учетом информации [12] уравнение численности трудовых ресурсов может быть представлено в виде:

$$T(t) = P_{\text{труд.}}(t) + P_{\text{пенс.}}(t) + P_{\text{подр.}}(t) + P_{\text{мигр.}}(t), \quad (1)$$

где t – год, $P_{\text{труд.}}(t)$ – численность населения в трудоспособном возрасте (16–59 лет) в t году, $P_{\text{пенс.}}(t)$ – численность работающих лиц пенсионного возраста в t го-

ду, $P_{\text{подр.}}(t)$ – численность работающих подростков до 16 лет в t году, $P_{\text{мигр.}}(t)$ – численность трудовых мигрантов в t году.

Для моделирования плотности распределения населения ρ по времени t и возрасту τ использовано уравнение демографической динамики [13]:

$$\frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu(t, \tau)\rho(t, \tau). \quad (2)$$

В уравнении (2) функция μ определяет выбытие населения, связанное со смертностью. Пополнение населения, связанное с рождаемостью β , задается через граничное условие для переменной $\tau = 0$ ($[\tau_1; \tau_2]$ – диапазон фертильности женщин):

$$\rho(t, 0) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \beta(t, \tau)\rho(t, \tau)d\tau, t > t_0. \quad (3)$$

Для замыкания задачи моделирования демографической динамики с учетом функций возможного повышения рождаемости и снижения смертности задается начальное условие при $t = t_0$:

$$\rho(t_0, \tau) = \rho_0(\tau), \tau > 0. \quad (4)$$

Для прогнозирования производных показателей будем использовать эконометрическую модель авторегрессии – модель Бокса – Дженкинса [14]:

$$y = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \gamma_1 \varepsilon_{t-1} - \gamma_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \gamma_q \varepsilon_{t-q}, \quad (5)$$

где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ – коэффициенты модели, p – порядок авторегрессии, q – порядок скользящего среднего, ε – случайные ошибки.

Построение прогноза показателей рынка труда, за исключением динамики трудовых ресурсов, осуществляется с помощью модели (5). Это модель ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average), которая программно реализована в библиотеке Python Statsmodels. Данная модель определяется тремя параметрами: p (количество прошлых значений временного ряда, используемых для прогнозирования текущего значения), q (количество ошибок прогноза прошлых периодов, которые учитываются при построении нового прогноза), d (число раз, которое необходимо продифференцировать данные для достижения стационарности). Параметры подбираются с помощью критерия Акаике, который оценивает, насколько хорошо модель подходит под исходные данные.

Результаты анализа и моделирования динамики показателей рынка труда в РФ

На рис. 1 приведены фактические распределения населения РФ по возрастам на 1 января 2015 года, 2025 года, а также спрогнозированные по модели (2)–(4) распределения населения РФ на начало 2035 года. На оси абсцисс расположены значения возраста τ , на оси ординат находится плотность распределения ρ населения по возрасту τ . Видно, что пик численности населения

РФ в 2025 году приходится на возраст 37–38 лет, а к началу 2035 года – 48 лет. К 2035 году численность трудоспособного населения снизится на 5,3 % по сравнению с уровнем 2025 г.

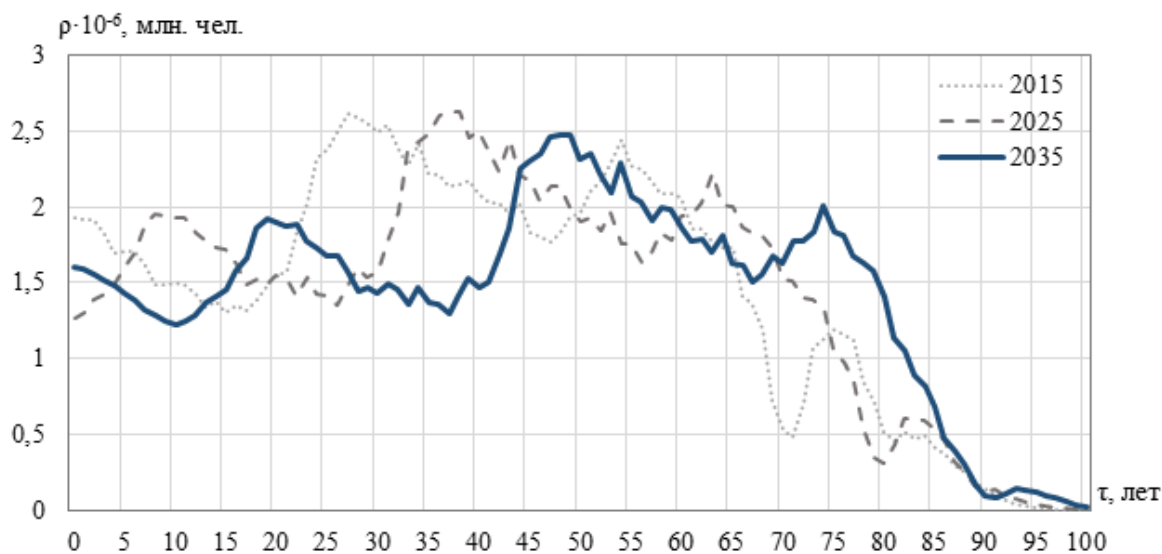


Рис. 1. Распределение численности населения РФ по возрастам начало 2015 г., 2025 года и прогноз на 2035 г., млн чел.

Рассмотрим динамику среднегодовой численности трудовых ресурсов в РФ и ее структуру. Для прогнозирования среднегодовой численности трудовых ресурсов была применена модель демографической динамики. Результаты моделирования и прогнозирования представлены на рис. 2.

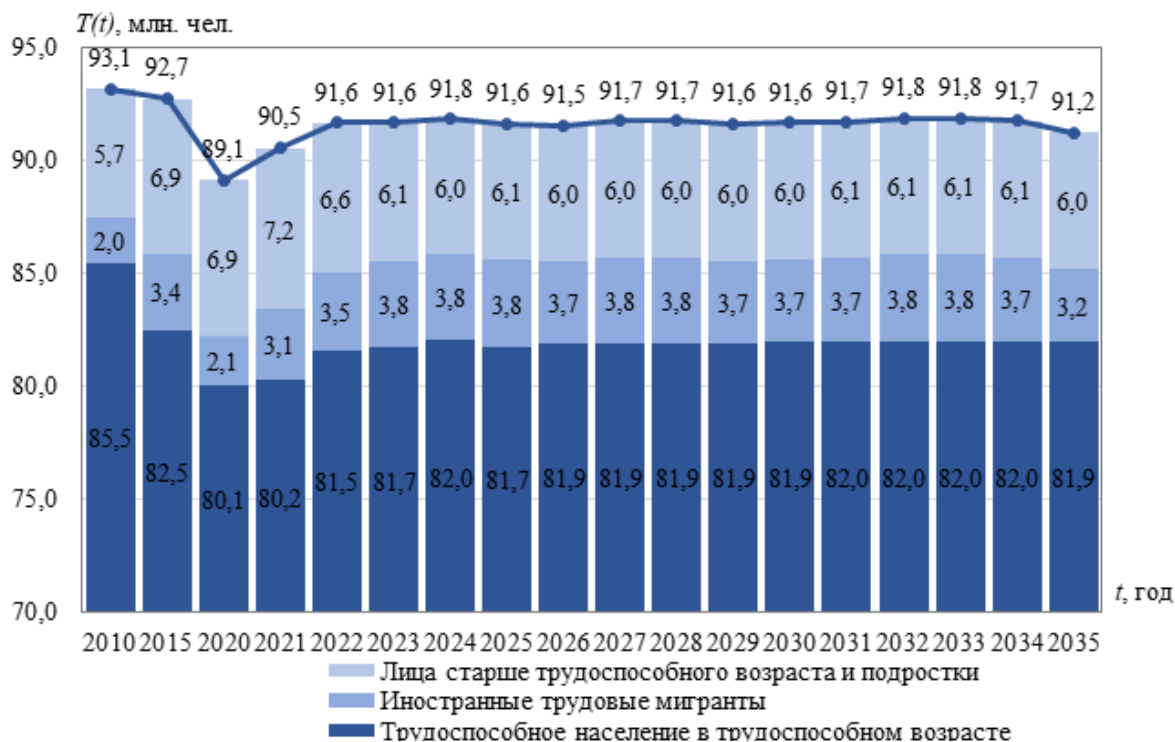


Рис. 2. Динамика среднегодовой численности трудовых ресурсов в РФ за период 2015–2025 гг. и ее прогноз до 2035 г., млн. чел.

Значительное снижение численности трудовых ресурсов в РФ можно заметить к 2020 г. Это связано в том числе с тем, что на сокращение численности трудовых ресурсов в РФ повлияла пандемия COVID-19 (в 2020 г. выросла смертность трудоспособного населения), а также снизилась численность иностранных трудовых мигрантов (в связи с частичным закрытием границ страны). За период с 2020 по 2024 г. наблюдается положительная тенденция показателя. Снижение численности работающих лиц старше трудоспособного возраста и подростков компенсируется увеличением численности трудоспособного населения и иностранных мигрантов в трудоспособном возрасте. По результатам прогноза трудовых ресурсов ожидается снижение среднегодового показателя. Причиной данной тенденции является снижение рождаемости, которое наблюдается еще с 2016 г.

Рассмотрим фактическую динамику численности занятого населения в РФ и построим ее прогноз до 2030 г. Для прогнозирования численности занятого населения была изучена занятость населения в отдельных возрастных группах. Результаты прогнозирования представлены на рис. 3.

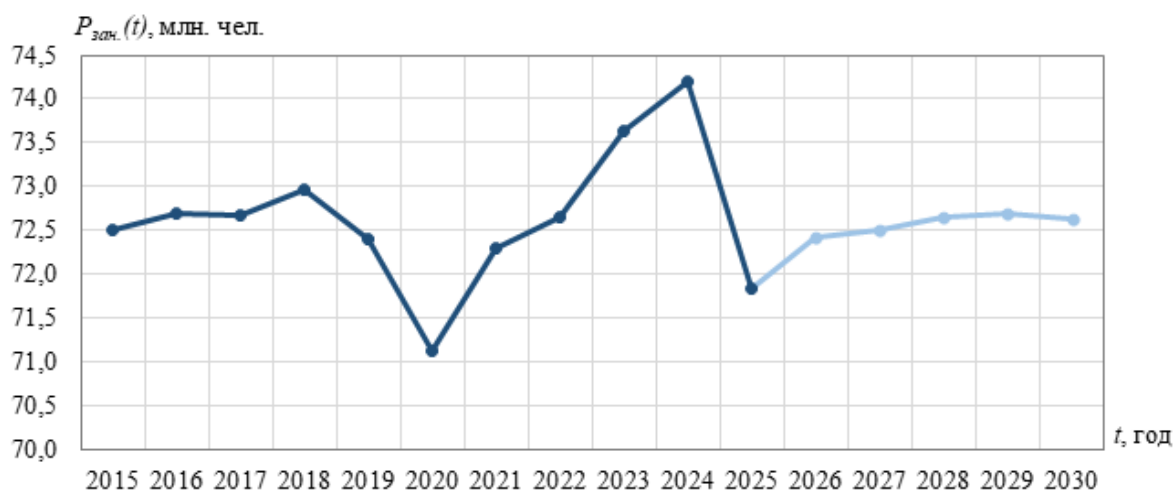


Рис. 3. График динамики численности занятого населения в РФ: фактические значения (2015–2025 гг.), прогнозные значения (2025–2030 гг.), млн чел.

Прогнозная динамика численности занятого населения в РФ сохранит среднее значение на уровне 2022 г. – 72,6 млн чел.

Заключение

Проведенный анализ и моделирование динамики основных показателей рынка труда в Российской Федерации предоставляют возможность не только оценить изменения в численности и возрастной структуре трудовых ресурсов РФ, но и выявить потенциальные риски, которые могут повлиять на устойчивое развитие экономики страны. По прогнозу к 2035 г. ожидается снижение численности трудовых ресурсов РФ, в том числе занятого населения. Это произойдет как за счет старения населения, так и из-за тенденции снижения рождаемости.

Список литературы

1. Кармова, Б. З. Особенности безработицы в России на современном этапе // *Фундаментальные исследования*. – 2020. – № 12. – С. 88–92.
2. Вавилова, Д. Д. Демографические проблемы современной Удмуртии : монография. – Ижевск : Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, 2022. – 172 с.
3. *Миришли, Ш. Э.* Некоторые проблемы прогнозирования социально-экономического развития региона / Ш. Э. Миришли, Н. Д. Романова. – 2016. – URL: <https://novainfo.ru/article/8889>.
4. *Гармаев, А. Б.* Имитационное моделирование рынка труда региона / А. Б. Гармаев, А. Ю. Лосева. – 2017. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/imitatsionnoe-modelirovanie-rynka-truda-regiona/viewer>.
5. *Речинский, А. В.* Становление и развитие имитационного моделирования / А. В. Речинский, Л. В. Черненькая, А. В. Черненький. – 2024. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/stanovlenie-i-razvitie-imitatsionnogo-modelirovaniya/viewer>.
6. *Кетова, К. В.* Экономико-математическая модель потенциала трудовых ресурсов и стоимостных характеристик демографических потерь. Прикладная эконометрика. – 2007. – № 3 (7). – С. 80–94.
7. *Русяк, И. Г.* Математическое моделирование и нейросетевое прогнозирование структуры и динамики человеческого капитала Российской Федерации. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2020. – № 53. – С. 13–24.
8. *Вавилова, Д. Д.* Информационно-аналитическая система анализа региональных социально-экономических процессов на основе комплексного использования динамических моделей различных типов. Прикладная информатика. – 2023. – Т. 18, № 4 (106). – С. 97–110.
9. Федеральная служба государственной статистики. Труд и занятость в России. – URL: <https://www.rosstat.gov.ru/folder/210/document/13210>.
10. Министерство труда и социальной защиты Российской Федерации. Информация. URL: <https://mintrud.gov.ru/docs/2683>.
11. Федеральная служба государственной статистики. Объяснительный словарь статистических терминов. Рынок труда. URL: [https://43.rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Рынок%20труда\(1\).pdf](https://43.rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Рынок%20труда(1).pdf).
12. Федеральная служба государственной статистики. Информационно-аналитические материалы. Численность населения Российской Федерации по полу и возрасту. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/11110/document/13284>.
13. *Кетова, К. В.* Разработка методов исследования и оптимизация стратегии развития экономической системы региона : дис. д-ра физ.-мат. наук / ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет». Ижевск, 2008.
14. *Вавилова, Д. Д.* Анализ, моделирование и прогнозирование динамики валового регионального продукта на основе производственной функции / Д. Д. Вавилова, Р. Зерари // *Экономика. Информатика*. – 2024. – Т. 51, № 1. – С. 5–17.

Изучение трудового потенциала старшего поколения

А. А. Загребина, К. В. Кетова

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Анализируется структура, финансово-экономические характеристики и квалификационный состав текущего состояния рынка труда людей пенсионного возраста. Исследуются вопросы, связанные с финансовой нагрузкой на трудоспособное население РФ. Численные исследования в работе выполнены по официальным статистическим данным населения РФ за период с 2013 по 2023 год, а также по спрогнозированным данным до 2033 года.

Ключевые слова: население, трудовой потенциал, старшее поколение.

В современном мире на фоне различных социально-экономических процессов, связанных со снижением рождаемости и старением населения, актуальным является решение задачи о реализации потенциала старшего поколения. По данным ООН, к 2050 г. численность людей пенсионного возраста увеличится почти в 2 раза [1], что в свою очередь может привести к дефициту трудовых ресурсов и необходимости поиска резервов. Один из потенциальных резервов – люди старших возрастов, которые обладают знаниями, умениями и опытом в трудовой деятельности.

По данным Росстата процент реализации трудового потенциала лиц пенсионного возраста снижается. К началу 2022 года количество работающих людей, достигших пенсионного возраста, составляет 20 % от их общей численности [2]. Отчасти это связано с проводимой в РФ пенсионной реформой [3], предусматривающей постепенное повышение пенсионного возраста, т. к. в связи с увеличением возраста выхода на пенсию количество пенсионеров уменьшается (люди дольше работают).

Объектом настоящего исследования является население РФ в возрасте старше официального трудоспособного. Для изучения трудового потенциала старшего поколения были проанализированы некоторые статистические данные: общая численности людей пенсионного возраста, численности работающих пенсионеров, их образование/квалификация [4], а также данные о возрасте выхода на пенсию по годам за прошедший период 2013–2023 гг. и до 2033 г. по плану пенсионной реформы [5].

В качестве метода исследования и прогнозного расчета численности любых возрастных групп используется уравнения динамики возрастного состава, для которого рассматривается плотности распределения $\rho(t, \tau)$ по возрастам τ и во времени t [6,7] (μ – распределение смертности по возрастам, l – функция

миграционного взаимодействия, задающая долю мигрирующих в каждой возрастной группе):

$$\frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu(t, \tau)\rho(t, \tau) + l(t, \tau)\rho(t, \tau). \quad (1)$$

Для точной оценки изменений в демографической и социально-экономической структуре населения необходимо учитывать не официальный возраст выхода на пенсию, установленный законодательством, а фактический возраст, в который люди покидают рынок труда [8] (рис. 1).

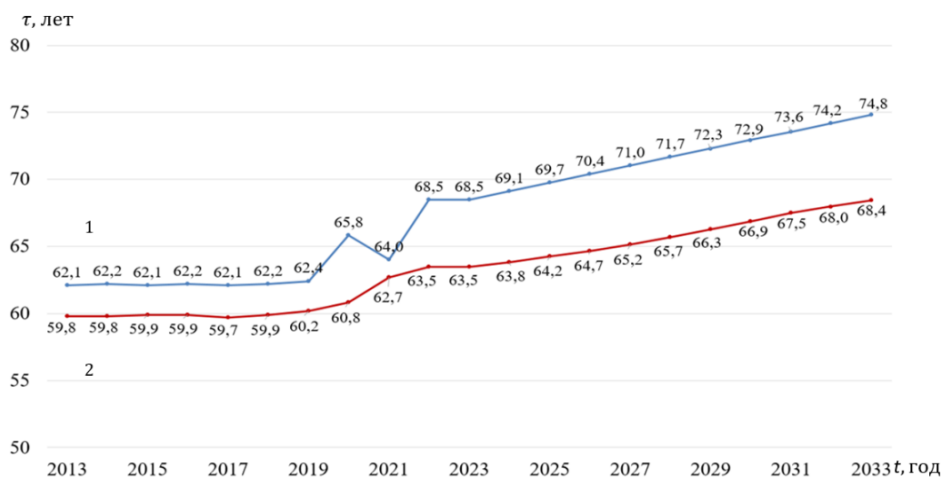


Рис. 1. Фактический возраст выхода на пенсию в РФ для мужчин (1) и женщин (2) за период 2013–2023 гг. и прогноз до 2033 г.

Для того чтобы оценить количество людей, достигших пенсионного возраста, общую численность женского $L_{\text{ж}}^{\circ}(t)$ и мужского $L_{\text{м}}^{\circ}(t)$ населения пенсионного возраста будем рассчитывать по формулам соответственно:

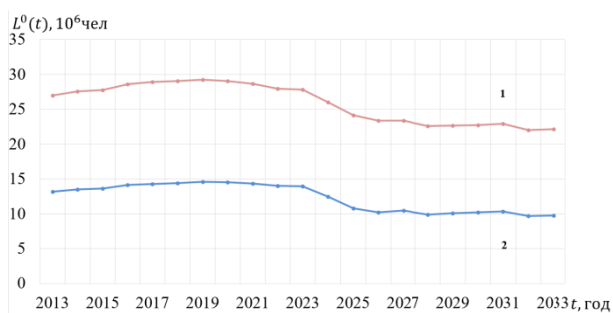
$$L_{\text{ж}}^{\circ}(t) = \int_{\tau_{2L}}^{\infty} \rho_{\text{ж}}(t, \tau) d\tau, \quad L_{\text{м}}^{\circ}(t) = \int_{\tau_{2L}}^{\infty} \rho_{\text{м}}(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\rho_{\text{ж}}(t, \tau)$ – плотность распределения женского населения по возрастам τ в год t , $\rho_{\text{м}}(t, \tau)$ – плотность распределения мужского населения по возрастам τ в год t .

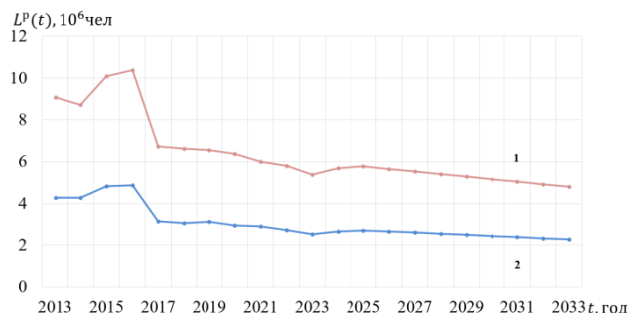
Первое повышение пенсионного возраста произошло в 2019 г. После этого повышения пенсионного возраста, начиная с 2021 г., наблюдается существенный спад численности людей пенсионного возраста (рис. 2, а), в том числе это касается и количества работающих пенсионеров (рис. 2, б). Построенные демографические прогнозы показывают, что в дальнейшем, с учетом продолжающегося повышения пенсионного возраста, следует ожидать медленное снижение общей численности работающих пенсионеров (рис. 2, б). Ключевые моменты этой динамики были ранее уже рассмотрены нами в статье [9], где детально проанализированы предшествующие тенденции и их последствия.

Учитывая тенденцию снижения общей численности работающих людей пенсионного возраста, важно уделить внимание анализу их квалификационного

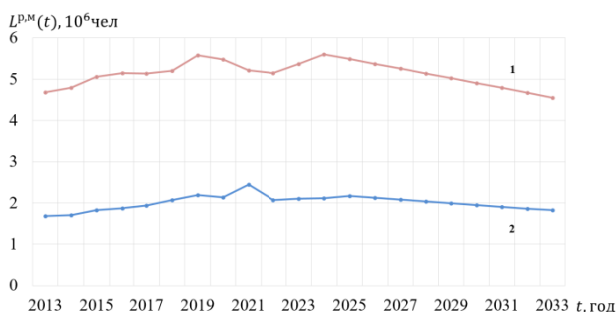
состава. В соответствии с классификацией по квалификации трудящихся, применяемой на рынке труда [4], рассматриваются следующие группы: лица с высшей квалификацией, лица со средней и низкой квалификацией, и лица без квалификации.



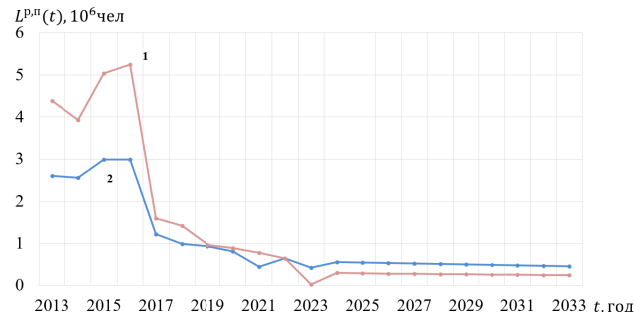
а) Численность населения пенсионного возраста



б) Численность работающего населения пенсионного возраста



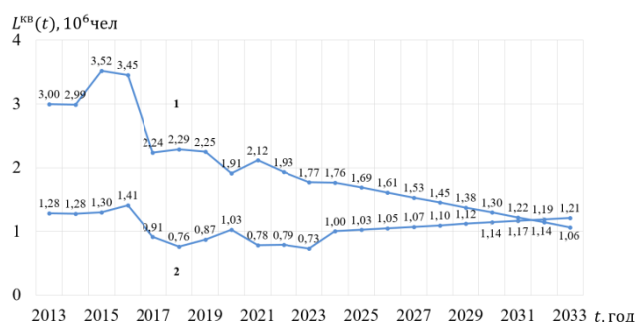
в) Численность работающих молодых пенсионеров (до 72-х лет)



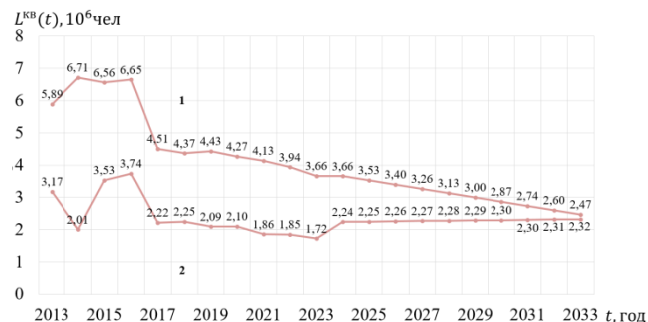
г) Численность работающих пожилых пенсионеров (с 73-х лет)

Рис. 2. Демографические характеристики женского (1) и мужского (2) населения пенсионного возраста в РФ за период 2013–2023 гг. и прогноз до 2033 г.

На рис. 3 представлена численность работающих людей пенсионного возраста в РФ, имеющих квалификацию (высшая, средняя и низкая – график (1)), без квалификации (график (2)) за период 2013–2023 гг. и прогноз до 2033 г.



а) Численность мужского населения пенсионного возраста



б) Численность женского населения пенсионного возраста

Рис. 3. Численность работающего населения пенсионного возраста в РФ с квалификацией (1) и без квалификации (2) за период 2013–2023 гг. и прогноз до 2033 г.

Кроме того, необходимо изучить соотношения работающих и не работающих людей старших возрастов, что позволит создать более полное представление о динамике трудовой занятости среди пожилого населения и выявить потенциальные пути оптимизации рынка труда. Рассчитаем на основе ранее описанных в статье [10] формул некоторые демографические коэффициенты: долю работающих людей в общем числе людей пенсионного возраста и долю пенсионеров, работающих на рынке труда:

$$K_{p,п}^{общ}(t) = [L_{ж}^p(t) + L_{м}^p(t)] / \int_{\tau_{2L}}^{\infty} \rho(t, \tau) d\tau, \quad (3)$$

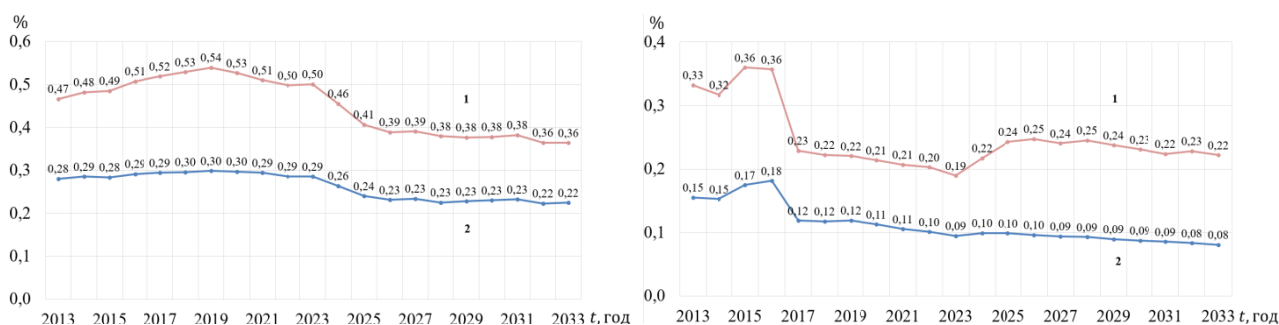
$$K_{p,п}^{р.труд}(t) = [L_{ж}^p(t) + L_{м}^p(t)] / \int_{\tau_{1L}}^{\tau_{2L}} \rho(t, \tau) d\tau,$$

где $L_{ж}^p(t)$ – численность работающих женщин пенсионного возраста; $L_{м}^p(t)$ – численность работающих мужчин пенсионного возраста.

Коэффициент нагрузки людьми пенсионного возраста на население трудоспособного возраста и на все население имеют вид:

$$K_{н.п}^{нас}(t) = \frac{\int_{\tau_{2L}}^{\infty} \rho(t, \tau) d\tau}{\int_{\tau_{1L}}^{\tau_{2L}} \rho(t, \tau) d\tau}, \quad K_{н.п}^{нас}(t) = \frac{\int_{\tau_{2L}}^{\infty} \rho(t, \tau) d\tau}{\int_0^{\infty} \rho(t, \tau) d\tau}. \quad (4)$$

Результаты расчетов коэффициентов представлены на рис. 4.



а) График динамики коэффициента нагрузки людьми пенсионного возраста на трудоспособное население (1) и на все население (2) в РФ

б) Доля работающих в общем числе людей пенсионного возраста (1) и доля работающих людей пенсионного возраста на рынке труда (2) в РФ

Рис. 4. Графики различных коэффициентов нагрузки как на трудоспособное население, так и на все население РФ за период 2013–2023 гг. и прогноз до 2033 г.

Доля работающих пенсионеров в общей численности работников колеблется в диапазоне 0,2–0,1 %, при этом имеет тенденцию к снижению. Это указывает на уменьшение активности пенсионеров в сфере трудовой занятости, что может быть связано как с возрастными факторами, так и с изменениями в экономической ситуации.

Далее изучим влияние изменения демографической структуры населения старших возрастов на экономическое состояние рынка труда, сосредоточив

внимание на анализе статистических данных по расходам $S_{пфр}$ Пенсионного фонда России (ПФР) [11] (рис. 5).

На всем периоде 2013–2023 гг. наблюдается увеличение расходов на пенсионное обеспечение. Средний темп роста за период составил 6,49 %. С учетом старения населения затраты на выплаты пенсий становятся все более значительным фактором, оказывающим влияние на бюджет и финансовую устойчивость пенсионной системы.

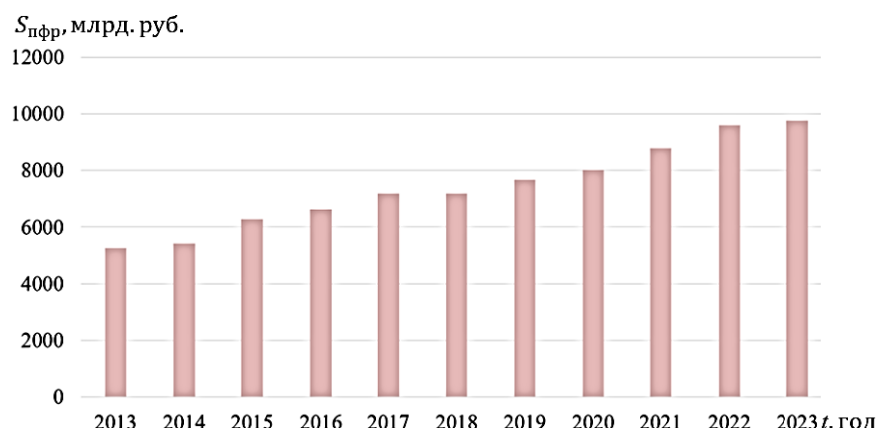


Рис. 5. Данные по расходам ПФР на пенсионное обеспечение в РФ в ценах текущего года за период 2013–2023 гг.

Рассмотрим модельную ситуацию. Предположим, что в год t люди пенсионного возраста, которые остаются на рынке труда, одновременно уйдут с этого рынка. Тогда, с одной стороны, количество работающих людей резко сократится и, с другой стороны, увеличится нагрузка на ПФР, поскольку этим людям будут проиндексированы пенсии.

На графике представлена моделируемая ситуация, где линия ПФР – расходы за 2013–2023 гг. с учетом работающих пенсионеров, а линии года t начиная с 2013-го – расходами ПФР, если бы пенсионеры вышли с рынка труда в год t . Запишем результаты исследования в таблицу и сравним между собой (таблица). Рассмотрим сценарии, каждому из которых соответствует выход работающих пенсионеров с рынка труда в год t начиная с 2013-го.

Также сравним моделируемую ситуацию с реальной, имеющейся на рынке труда с точки зрения нагрузки на ПФР и, как следствие, на бюджет РФ.

Таким образом, уход группы людей старших возрастов с рынка труда значительно увеличивает финансовые расходы государства. Наиболее заметная разница между модельными и реальными данными за период 2013-2023 годов была зафиксирована в 2015 году, когда нагрузка на бюджет возросла на 13,5%.

Минимальное отклонение наблюдалось в 2017 году, с увеличением нагрузки на 2,14%.

Сравнительный анализ расходов ПФР при различных сценариях выхода пенсионеров с рынка труда

Сценарий, которому соответствует выход пенсионеров с рынка труда в год t	Сумма, на которую будет происходить в среднем ежегодное увеличение ПФР на содержание пенсионеров по сравнению со стандартной ситуацией, млрд руб	Сумма, на которую будет происходить в среднем ежегодное увеличение ПФР на содержание пенсионеров по сравнению со стандартной ситуацией в ценах 2023 г., млрд руб	Среднее значение увеличения расходов ПФР за 2013–2023 гг., если пенсионеры уйдут с рынка труда в год t в ценах 2023 года, %
1 – 2013 г.	192,67	261,31	2,59
2 – 2014 г.	192,86	230,31	2,29
3 – 2015 г.	228,03	237,45	2,35
4 – 2016 г.	238,76	215,72	2,13
5 – 2017 г.	159,19	123,20	1,21
6 – 2018 г.	159,70	103,36	1,02
7 – 2019 г.	165,77	87,02	0,86
8 – 2020 г.	166,68	67,90	0,67
9 – 2021 г.	167,71	49,31	0,49
10 – 2022 г.	170,04	31,76	0,32
11 – 2023 г.	172,99	15,77	0,16



Рис. 6. Расходы ПФР в общем числе расходов РФ за период 2013–2023 гг. с учетом работающих пенсионеров (по факту) (1) и без них (2)

В среднем, за рассматриваемый период увеличение нагрузки на бюджет составило 5,41 %. С уменьшением численности работающих пенсионеров сокращается и общее число трудоспособных граждан на рынке труда, что, в свою очередь, приводит к снижению объемов взносов в Пенсионный фонд России.

Список литературы

1. World Population Prospects 2019: Highlights [Электронный курс]. New York, 2019. P. 18. Access mode : <https://population.un.org/wpp/Publications>.
2. Старшее поколение. Демографические показатели // Федеральная служба государственной статистики. – URL:<https://rosstat.gov.ru>.

3. О внесении изменений в отдельные законодательные акты РФ и по вопросам назначения и выплаты пенсий. Федеральный закон от 03.10.2018 № 350-ФЗ // Консультант Плюс. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_308156.

4. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru>.

5. Статистика и показатели. – URL: <https://rosinfostat.ru>.

6. *Кетова, К. В.* Демографические проблемы современной Удмуртии / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова. – Ижевск : ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. – 172 с.

7. *Кетова, К. В.* Математические модели экономической динамики: монография. – Ижевск : ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова, 2013. – 284 с.

8. *Гимпельсон, В. Е.* Российский труд через призму демографии / В. Е. Гимпельсон, Р. И. Капелюшникова. – Москва : Изд. дом ВШЭ, 2020. – 436 с.

9. *Загребина, А. А.* Изучение демографических характеристик людей старших возрастов, присутствующих на рынке труда / А. А. Загребина, К. В. Кетова // II Всероссийская научно-практическая конференция «Социально-экономический потенциал регионов России». – Ижевск, 2024. – С. 96–112.

10. *Загребина, А. А.* Разработка программного комплекса анализа и моделирования демографических характеристик, а также поведения работающих людей пенсионного возраста на рынке труда / А. А. Загребина, К. В. Кетова // III Региональная школа-семинар молодых ученых, аспирантов, и студентов «Липановские чтения». – Ижевск, 2024. – С. 126–132.

11. Счетная палата РФ. – URL: <https://ach.gov.ru>.

Построение кластеров субъектов Российской Федерации по показателям смертности

Кетова К. В., Телицина Е. Д., Васильева И. В.

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Статья посвящена анализу смертности в РФ в пространственно-временной дифференциации. Изучался период с 2010 по 2023 год. По показателям уровня смертности произведено распределение регионов РФ по кластерам в каждый год из изучаемого временного периода и проанализирована динамика изменения состава кластеров.

Ключевые слова: демографическая ситуация, коэффициент смертности, кластер, DATA-анализ.

Введение

Рост численности населения является необходимым элементом устойчивого развития территорий. Стратегические перспективы демографической составляющей национальной силы России изложены в работе [1]; анализ демографического самочувствия регионов России – в Национальном демографическом докладе [2].

По имеющимся данным [3], на 1 января 2023 г. численность населения России составляет 146,45 млн человек. К 1 января 2046 г. население страны по прогнозам Росстата составит 138,77 млн человек.

Если рассматривать последний временной период, то за последние 5 лет общая численность населения в стране снизилась на 0,3 %. За последний пятилетний период наблюдается рост числа умерших с 1,83 до 1,90 млн человек (увеличение составило 3,8 %). Федеральная служба государственной статистики РФ [4] предоставляет разные варианты прогнозов численности населения РФ. Пессимистичный вариант прогнозирует сокращение численности населения до 134,3 млн человек в период с 2023 по 2036 год, т. е. уменьшение на 12,1 млн человек. Значительно меньше Россия потеряет к 2036 г. при среднем варианте прогноза – 3,5 млн человек, а численность населения составит 142,9 млн человек в 2036 г. Оптимистичный вариант прогноза предполагает увеличение численности населения до 150,1 тыс. человек, т. е. на 3,7 млн человек за 12 лет.

Естественный прирост населения, формирующий его численность, определяется разницей рождаемости и смертности. Изучение рождаемости представлено в работах авторов [5–8]. В настоящей работе будем рассматривать смертность. Поскольку социально-экономическое положение разных регионов РФ различно, то и показатели смертности варьируются по территориальному

признаку. Высокая смертность влечет за собой, помимо многих других, и потери экономического характера [9, 10].

Основная часть

Методы изучения смертности базируются на абсолютных и относительных показателях. Для анализа динамики смертности будем использовать относительный показатель – коэффициент смертности $\mu(t)$, который рассчитывается как отношение числа умерших людей $N(t)$ к средней численности населения $\rho(t)$ в год t на определенной территории. Указывается в расчете на 1000 человек населения, измеряется в промилле, имеет вид:

$$\mu(t) = \frac{N(t)}{\rho(t)} \cdot 1000. \quad (1)$$

Будем изучать период 2010–2023 гг. и использовать для расчетов официальные статистические данные по показателям смертности в РФ [11, 12]. Объем данных, содержащий информацию о показателях смертности в разные периоды времени, является достаточно значительным. Проведение статистической обработки и анализа такого объема информации (Data-анализ) будем проводить с использованием современных информационных технологий. Практическое осуществление анализа данных осуществляется с использованием Jupyter Notebook и языка программирования Python. В процессе анализа данных применяются библиотеки для математических расчетов (NumPy, Pandas) и для визуализации результатов (Matplotlib, Seaborn).

Динамика коэффициента смертности в РФ за период 2010–2023 гг. представлена на рис. 1.

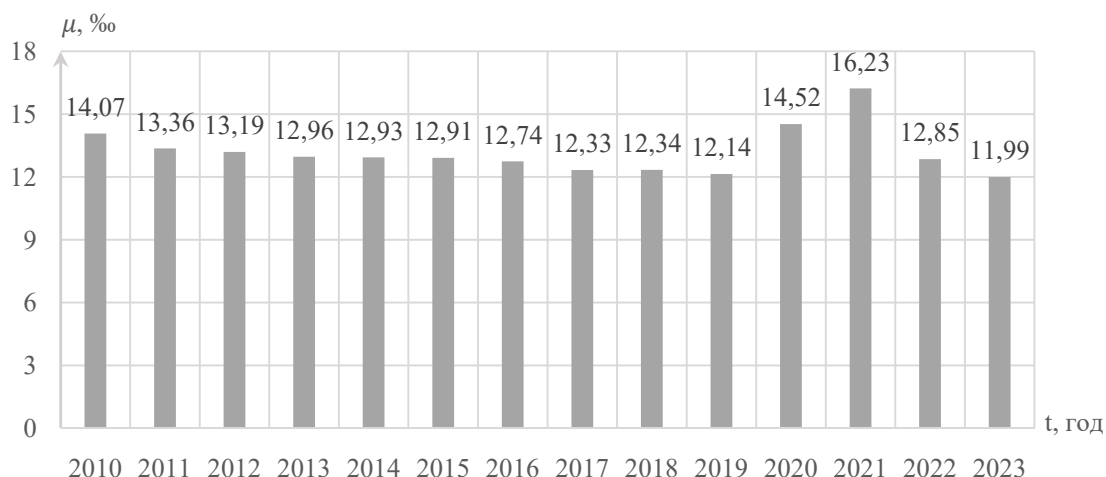


Рис. 1. Динамика коэффициента смертности в РФ за период 2010–2023 гг.

Коэффициент смертности в период 2010–2019 гг. постепенно снижался; далее, начиная с 2020 г., повысился до 2021 г. включительно. Самое большое значение $\mu(t)=16,23$ ‰ коэффициент принимал в 2021 г., самое маленькое $\mu(t)=11,99$ ‰ в 2023 г.

Также расчет коэффициента смертности $\mu(t)$ был проведен для каждого из субъектов РФ за период с 2010 по 2023 г. Представлены 83 региона, которые входили в состав РФ на начало исследуемого периода (2010 г.). Количество регионов в расчетах остается неизменным для возможности сопоставления результатов исследования во времени.

На основе значений коэффициента смертности осуществим разделение субъектов РФ на кластеры по показателям смертности. Рассмотрим группировку регионов в начале периода (2010 г.) и в конце (2023 г.). Перераспределение регионов между кластерами показывает происшедшие в них качественные изменения за период 2010–2023 гг. Было сформировано четыре кластера.

Первый кластер содержит регионы, в которых наблюдаются минимальные значения коэффициента смертности (3,22 ‰ – 10,00 ‰). Значения 3,22 ‰ наблюдается в 2023 году в Республике Ингушетия; наиболее близкое к 10,00 ‰ (9,81 ‰) значение наблюдается в Республике Саха (Якутия) в 2010 г.

Во втором кластере находятся регионы со значениями коэффициента смертности, близкими к среднему значению по стране. Диапазон изменения варьируется от значения 10,00 ‰ до 15,00 ‰. Здесь регион с наименьшим значением коэффициента смертности – это 10,08 ‰ (Чукотский АО, 2023). Регион с наибольшим значением (14,97 ‰) – Ярославская область в 2023 г.

Третий кластер образуют регионы, демонстрирующие значения коэффициента смертности от 15,00 ‰ до 20,00 ‰. Значения 15,03 ‰ наблюдается в 2010 году в Алтайском крае; наиболее близкое к 20,00 ‰ (19,34 ‰) значение наблюдается в Тульской области в 2010 г.

В четвертом кластере находятся регионы с максимальными значениями коэффициента смертности, нижняя граница 20,00 ‰. Здесь находятся четыре региона. Наибольшее значение коэффициента смертности 21,27 ‰ наблюдается в Псковской области в 2010 г. Эти результаты представлены в таблице.

Самый высокий коэффициент смертности в 2010 году был зафиксирован в Псковской области, он составил 21,26 ‰; в 2023 году регион стал входить в кластер со средним значением показателя (17,07 ‰).

Кластеры регионов РФ по уровню смертности за 2010 и 2023 года

Кластер	Диапазон изменения	2010 год		2023 год		Характер изменения
		Среднее значение коэффициента смертности в кластере	Регионы, входящие в кластер	Среднее значение коэффициента смертности в кластере	Регионы, входящие в кластер	
Кластер 1 (минимальные значения коэффициента смертности)	От 3,22 до 10,00	6,11	Респ. Дагестан; Чеченская Респ.; Тюменская обл.; Респ. Саха (Якутия) и остальные (9 регионов)	5,98	Респ. Дагестан; Чеченская Респ.; Г. Москва; Респ. Северная Осетия-Алания; Тюменская область и остальные (13 регионов)	Среднее значение стало на 0,13 ниже, и в то же время число регионов, входящих в кластер с минимальными значениями, возросло в 1,4 раза
Кластер 2 (средние по стране значения коэффициента смертности)	От 10,00 до 15,00	13,41	г. Москва; Архангельская обл.; Калининградская обл.; г. Санкт-Петербург; Краснодарский край и остальные (39 регионов)	12,92	Московская обл.; Архангельская обл.; Вологодская обл.; г. Санкт-Петербург; Респ. Адыгея; Удмуртская Респ. и остальные (57 регионов)	Среднее значение стало на 0,49 ниже, но в то же время число регионов, входящих в кластер с минимальными значениями, увеличилось в 1,46 раза
Кластер 3 выше среднего по стране значения коэффициента смертности)	От 15,00 до 20,00	16,66	Воронежская обл.; Липецкая обл.; Московская обл.; Тульская обл. и остальные (32 регионов)	15,91	Смоленская обл.; Тульская обл.; Респ. Карелия; Новгородская обл. и остальные (13 регионов)	Среднее значение стало на 0,75 ниже, но в то же время регионов, входящих в кластер со средними значениями, стало в 2,46 раз меньше
Кластер 4 (максимальные значения коэффициента смертности)	От 20,00 и выше	20,52	Тверская обл.; Новгородская обл.; Псковская обл. (3 региона)	–	(0 регионов)	–

На рис. 2 представлены гистограммы коэффициентов смертности. По оси x отложены значения коэффициента смертности μ , по оси y – количество регионов n .

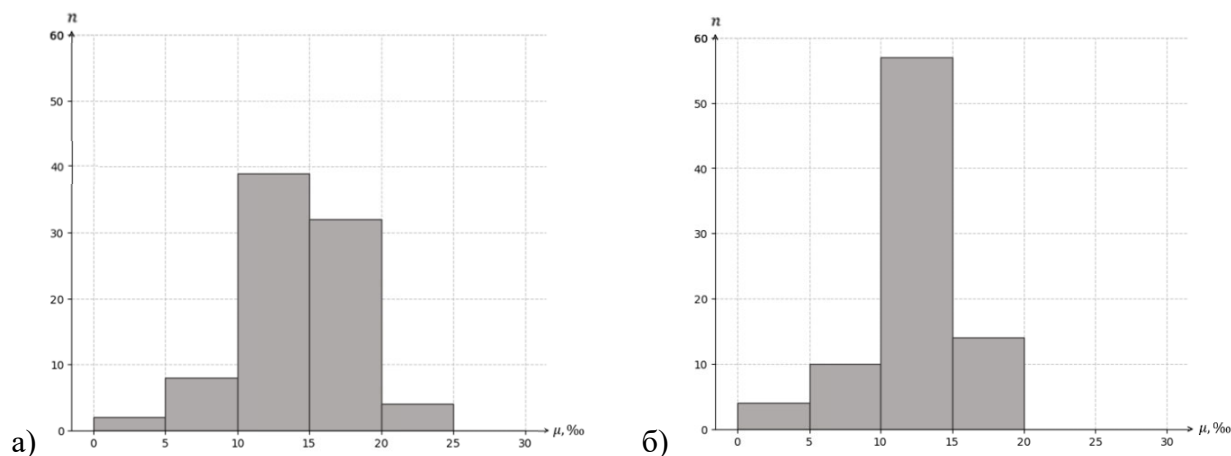


Рис. 2. Гистограммы коэффициента смертности по регионам РФ:
а – 2010 год; б – 2023 год

Кластер 1 (минимальные значения коэффициента смертности) демонстрирует положительную динамику. Если в 2010 г. в него входили 9 регионов, включая Тюменскую область; республики – Дагестан, Ингушетия, Кабардино-Балкарская, Карачаево-Черкесская, Саха (Якутия), Чеченская, а также автономные округа – Ханты-Мансийский – Югра, Ямало-Ненецкий, то к 2023 г. их число увеличилось. В кластер вошли новые субъекты: республики – Калмыкия, Северная Осетия-Алания, Тыва, а также город Москва, что свидетельствует о снижении смертности в этих регионах.

Кластер 2 (средние по стране значения коэффициента смертности) также расширился с 39 регионов в 2010 г. до 57 в 2023-м. В 2010 г. в него входили следующие регионы: области – Архангельская, Астраханская, Белгородская, Волгоградская, Иркутская, Калининградская, Магаданская, Мурманская, Новосибирская, Омская, Оренбургская, Ростовская, Сахалинская, Свердловская, Томская, Челябинская; края – Забайкальский, Камчатский, Краснодарский, Красноярский, Приморский, Ставропольский, Хабаровский; республики – Адыгея, Алтай, Башкортостан, Бурятия, Калмыкия, Коми, Северная Осетия-Алания, Татарстан, Тыва, Хакасия, Удмуртская, Чувашская; города – Москва, Санкт-Петербург; автономные округа – Ненецкий, Чукотский. К 2023 г. список пополнился такими регионами, как Амурская, Брянская, Вологодская, Воронежская, Еврейская автономная, Калужская, Кемеровская, Курская, Ленинградская, Липецкая, Московская, Нижегородская, Пензенская, Рязанская, Самарская, Саратовская, Ульяновская, Ярославская области, а также Алтайский и Пермский края, республики – Марий Эл и Мордовия.

Кластер 3 (выше среднего по стране значения коэффициента смертности) претерпел значительные изменения. В 2010 г. в него входили 32 региона, включая области – Амурская, Брянская, Владимирская, Вологодская, Воронеж-

ская, Еврейская автономная, Ивановская, Калужская, Кемеровская, Кировская, Костромская, Курганская, Курская, Ленинградская, Липецкая, Московская, Нижегородская, Орловская, Пензенская, Рязанская, Самарская, Саратовская, Смоленская, Тамбовская, Тульская, Ульяновская, Ярославская; края – Алтайский, Пермский; республики – Карелия, Марий Эл, Мордовия. Однако к 2023 году их число сократилось до 13: области – Владимирская, Ивановская, Кировская, Костромская, Курганская, Новгородская, Орловская, Псковская, Смоленская, Тамбовская, Тверская, Тульская; и республику Карелия.

Кластер 4 (максимальные значения коэффициента смертности) в 2010 г. включал 3 региона (см. таблицу), однако к 2023 г. в нем не осталось ни одного субъекта, что говорит о значительном улучшении ситуации.

Выводы

Анализ динамики смертности в регионах РФ за период с 2010 по 2023 г. позволяет увидеть устойчивую положительную тенденцию: сокращение числа регионов с высокими показателями смертности при одновременном росте субъектов с минимальными и средними значениями.

Кластеризация регионов выявила существенные территориальные различия. Регионы с традиционно благоприятными демографическими показателями, такие как Республика Дагестан, Чеченская Республика и город Москва, сохранили позиции в кластере с минимальной смертностью, причем число таких субъектов увеличилось. В то же время большинство регионов перешло в группу со средними значениями, что свидетельствует о постепенном выравнивании ситуации. Наиболее значимым изменением стало полное исчезновение кластера с максимальной смертностью, куда ранее входил проблемные области, относящиеся к Северо-Западному федеральному округу.

Тем не менее сохраняется группа из 13 регионов с повышенной смертностью, включая Смоленскую, Тульскую, Псковскую области и Республику Карелию. Это указывает на необходимость разработки специальных региональных программ, направленных на модернизацию системы здравоохранения, улучшение экологической ситуации, повышения уровня жизни населения.

Список литературы

1. Стратегические перспективы демографической составляющей национальной силы России / А. И. Агеев, А. Р. Бахтизин, Е. Л. Логинов, М. Ю. Сидоренко // Экономические стратегии. – 2023. № 25 (5). – С. 38–53. – URL: <https://doi.org/10.33917/es-5.191.2023.38-53>.
2. *Рязанцев, С. В.* Национальный демографический доклад – 2023 / С. В. Рязанцев, Ю. Г. Лаврикова // Демографическое самочувствие регионов России. – Москва, Вологда, 2024. – DOI:10.19181/monogr:978-5-89697-427-7.2024.
3. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/313/document/220709> (дата обращения 10.02.2025).
4. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/313/document/72529> (дата обращения 15.03.2025).
5. *Кетова, К. В.* Исследование зависимости рождаемости от влияющих региональных факторов и их корреляционных особенностей / К. В. Кетова, Д. Д. Вавило-

ва // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2024. – № 4. – С. 17–39.

6. *Кетова, К. В.* Исследование влияния демографических, социально-экономических, медико-биологических, экологических, этнических факторов на рождаемость в Удмуртской Республике / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова // Социально-экономическое управление: теория и практика. – 2024. – Т. 20, № 1. – С. 26–35.

7. *Кетова, К. В.* Изучение распределения регионов РФ по показателям рождаемости и смертности / К. В. Кетова, Е. Д. Телицина // Актуальные проблемы социально-экономического развития общества : сборник трудов по материалам VII Национальной научно-практической конференции филиала ФГБОУ ВО «КГМТУ». – Керчь, 2025. – С. 322–327.

8. *Кетова, К. В.* Эконометрическое моделирование влияния фактора материнского капитала на уровень рождаемости в регионе / К. В. Кетова, Д. Д. Вавилова, А. С. Черепанова // Интеллектуальные системы в производстве. – 2023. – Т. 21, № 2. – С. 58–68.

9. *Кетова, К. В.* Экономико-математическая модель потенциала трудовых ресурсов и стоимостных характеристик демографических потерь // Прикладная эконометрика. – 2007. – № 3 (7). – С. 80–94.

10. *Русяк, И. Г.* Анализ экономических характеристик демографических потерь / И. Г. Русяк, К. В. Кетова // Вестник Томского государственного университета. – 2008. – № 310. – С. 153–160.

11. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/11110/document/13269> (дата обращения 01.02.2025).

12. Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/compendium/document/13282> (дата обращения 01.02.2025).

Статистическое моделирование и анализ влияния факторов на интеллектуальный потенциал населения

М. С. Кузьмин, А. А. Жиделева

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Понятие «интеллектуальный потенциал населения» не является формализованным. В то же время наблюдается потребность в его измерении и сопоставлении во времени, потребность регулярного мониторинга этого показателя. Данное исследование направлено на построение математического инструментария для определения и анализа понятия «интеллектуальный потенциал населения». Все исследование проведено на примере статистических данных Приволжского федерального округа. Представлен анализ результата расчетов индекса интеллектуального потенциала населения Приволжского федерального округа и его динамика за период 2013–2023 гг.

Ключевые слова: интеллектуальный потенциал, статистическое моделирование, индекс, образование, факторы.

Современный мир вступает в новую эпоху, где стремительное развитие науки и технологий превратилось в ключевой фактор прогресса наций и регионов. Предсказание Карла Маркса, сделанное еще в XIX веке, о том, что наука станет главной производительной силой общества [1], сегодня находит четкое подтверждение. В новых условиях именно интеллектуальный потенциал и капитал определяют глобальное лидерство [2, 3]. Государства и регионы, активно инвестирующие в образование, научные разработки и инновации, получают существенное преимущество в конкурентной борьбе за технологическое превосходство [4]. Сегодня экономическая, финансовая, военная и политическая мощь развитых стран напрямую связана с уровнем развития фундаментальной и прикладной науки, масштабами научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, а также с долей высокотехнологичной продукции в промышленном производстве и ВВП [5, 6].

На интеллектуальное развитие населения воздействует широкий спектр факторов. В результате теоретического исследования научной литературы и обобщения экспертных оценок [7–9] была осуществлена систематизация факторов, влияющих на уровень интеллектуального потенциала общества. Определены два ключевых типа показателей, воздействующих на интеллектуальный уровень населения: качественные и количественные. Количественные показатели, в свою очередь, делятся на две категории: те, что связаны с условиями жизни, и те, что отражают доступность образования и научных знаний для людей.

К количественным показателям состояния науки и образования отнесем государственное финансирование науки и образования.

К качественным показателям отнесем индекс, отображающий общий уровень образованности, начиная с возраста экономической активности населения; индекс обучающихся в докторантуре и аспирантуре; долю научных работников; индекс получающих образование; долю преподавателей в вузах.

После определения ключевых факторов, воздействующих на интеллектуальный потенциал населения, возникает вопрос: какой из них наиболее значим и как его измерить. Для количественной оценки применим методику Малапуры [10]. Для расчета показателя интеллектуального потенциала IP расширим существующую модель [10], добавив дополнительные параметры. Итоговое уравнение имеет вид:

$$IP = k_1 * I_c + k_2 * J_n + k_3 * L_o, \quad (1)$$

где I_c – индекс, отображающий общий уровень образованности, начиная с возраста экономической активности населения; $J_n = J_1 + J_2 + J_3$: J_1 – индекс обучающихся в докторантуре и аспирантуре; J_2 – индекс финансирования науки; J_3 – доля научных работников; $L_o = L_1 + L_2 + L_3$ L_1 – индекс получающих образование; L_2 – индекс финансирования образования; L_3 – доля преподавателей в вузах; k_1, k_2, k_3 – корректировочные коэффициенты.

Для изучения структуры показателя интеллектуального потенциала (1) обратимся к данным госстатистики Приволжского федерального округа (ПФО) за 2013–2023 гг. [11, 12]. Первоначальный анализ целесообразно начать с оценки индекса общего уровня образования населения I_c . Для подсчета индекса, отражающего общий уровень образования, будем использовать формулу:

$$I_c = \frac{\sum_{i=1}^5 n_i * p_i}{\sum_{i=1}^5 p_i} \quad (2)$$

где n_i – уровни образования человека (индексы обозначают следующее: $i = 1$ – люди, не имеющие образования, $i = 2$ – имеющие среднее и основное общее образование, $i = 3$ – среднее профессиональное или неполное высшее образование, $i = 4$ – высшее образование, $i = 5$ – имеющие ученую степень). В соответствии с этой градацией, в условиях нормировки уровней образования от 0 до 1 имеем: $n_1 = 0$, $n_2 = 0,25$, $n_3 = 0,5$, $n_4 = 0,75$, $n_5 = 1$. p_i – численность людей, имеющих тот или иной уровень образования.

На рис. 1 отображен график, иллюстрирующий динамику нормированного индекса I_c , который отражает общий уровень образованности населения ПФО. Видим, что в период с 2013 по 2023 г. наблюдается в основном положительная динамика индекса.

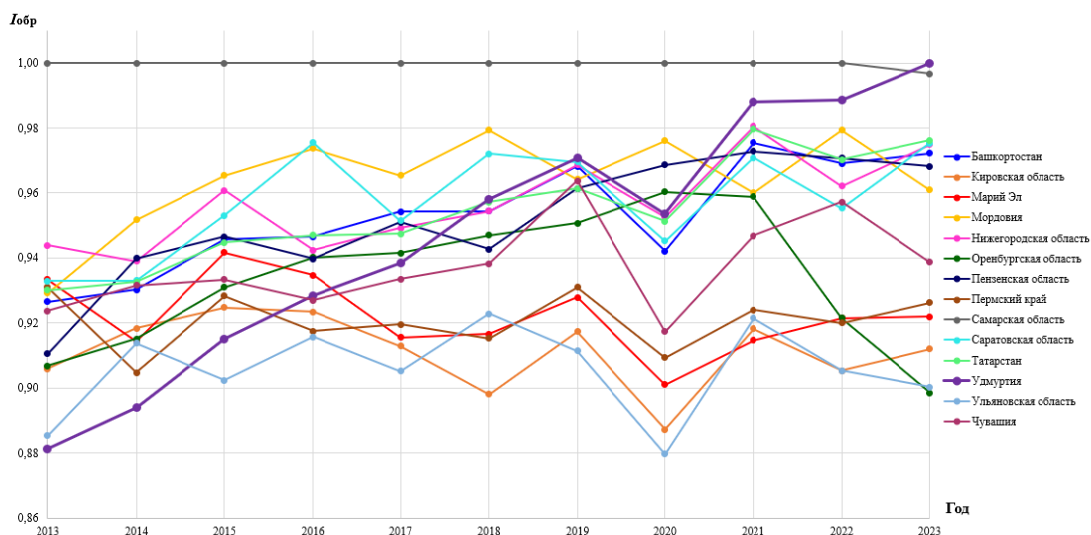


Рис. 1. Динамика индекса, отображающего общий уровень образованности населения УР за период 2013–2023 гг.

Проанализируем индекс получающих образование L_1 и индекс обучающихся в аспирантуре и докторантуре J_1 . На рис. 2 изображен график динамики L_1 для ПФО за период 2013–2023 гг.

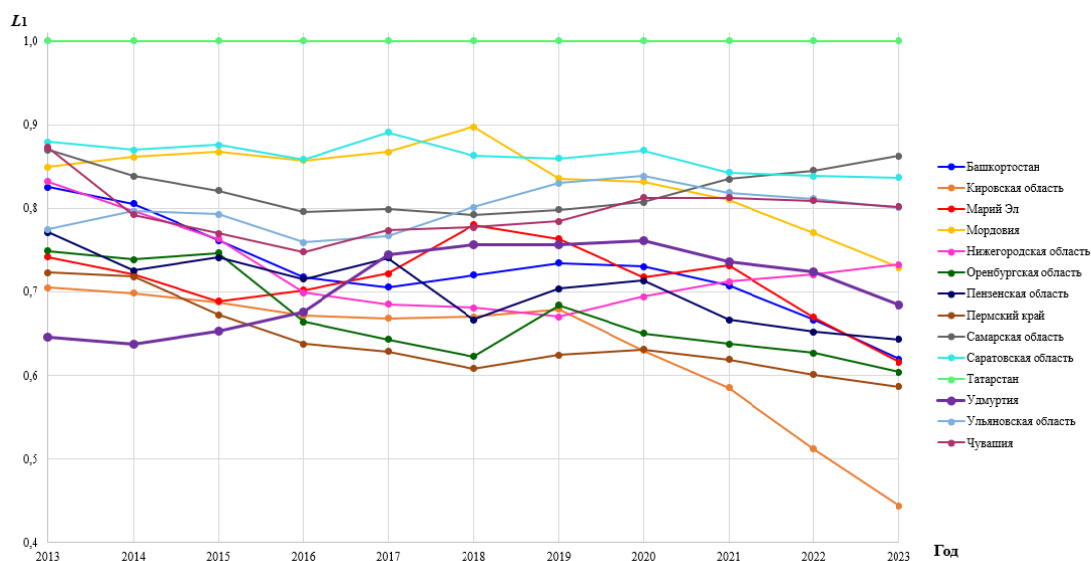


Рис. 2. Динамика индекса получающих образование в ПФО за период 2013–2023 гг.

Анализ данных, представленных на рис. 2, показывает значительную региональную дифференциацию показателя. Максимальные значения наблюдаются в Республике Татарстан, тогда как Пермский край демонстрирует минимальные результаты. Интерес представляет динамика УР: занимая последнюю позицию до 2016 г., к 2017 г. она поднимается на 7-е место в рейтинге.

На рис. 3 показана динамика индекса J_1 студентов в аспирантуре и докторантуре Приволжского федерального округа за период с 2013 по 2023 г.

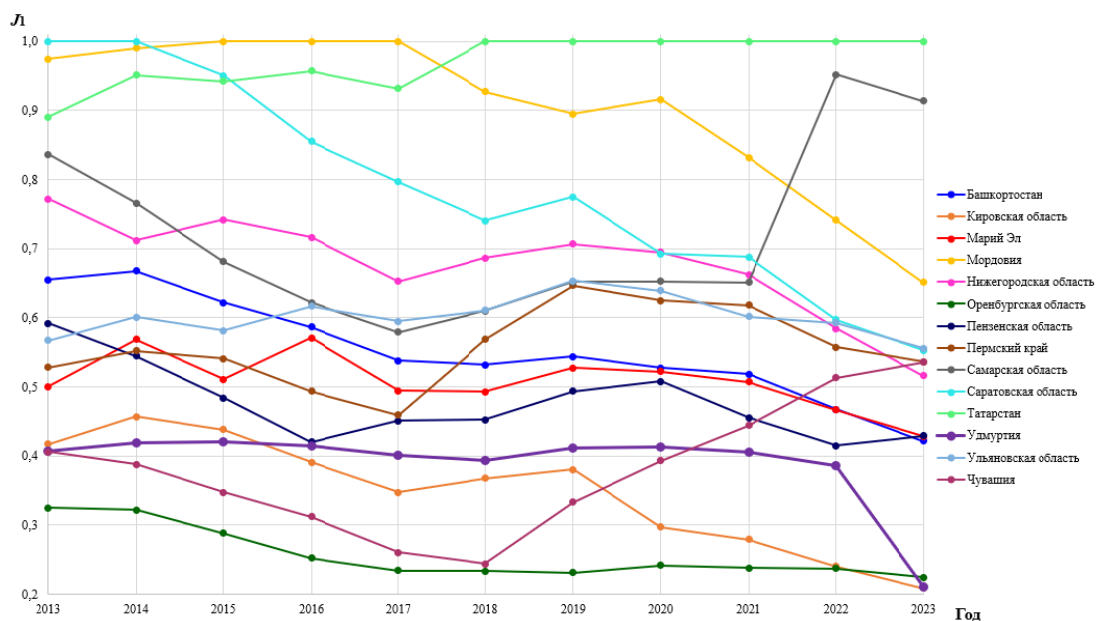


Рис. 3. Динамика индекса обучающихся в аспирантуре и докторантуре в ПФО за период 2013–2023 гг.

Анализ динамики исследуемого показателя выявляет четкую региональную дифференциацию: лидерские позиции последовательно занимали Саратовская область (до 2014 г. включительно), Республика Мордовия (2015–2017 гг.) и Республика Татарстан (2018–2023 гг.), тогда как Оренбургская область стабильно демонстрировала наименьшие значения, занимая последнее место в рейтинге; при этом Удмуртская Республика (УР) на протяжении всего исследуемого периода находилась на 11-й позиции, что соответствует низкому уровню развития показателя среди регионов ПФО.

Рассмотрим данные о финансировании образования в ПФО. График динамики L_2 за период с 2013 по 2023 г. представлен на рис. 4.

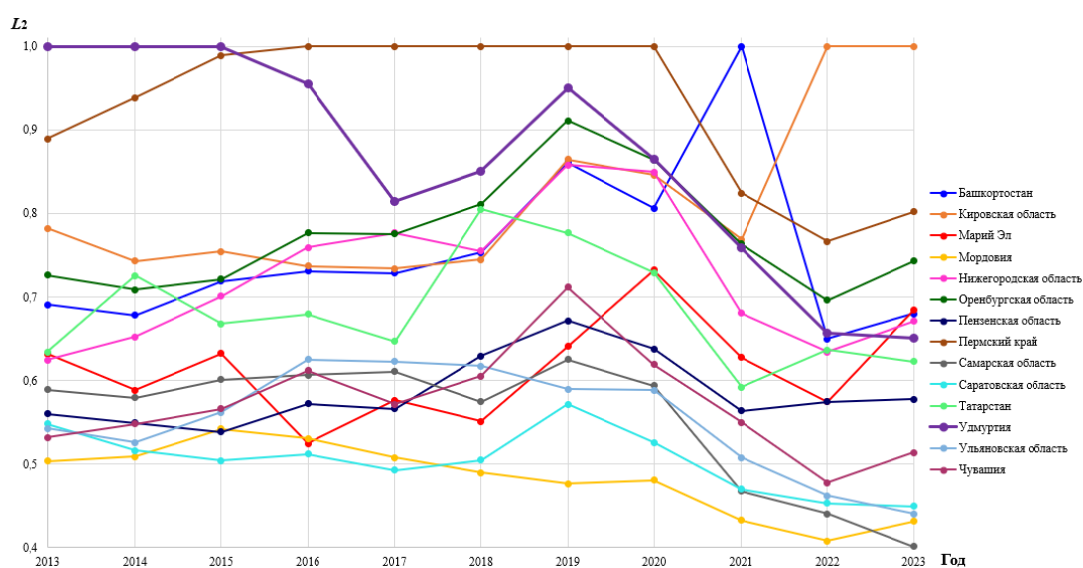


Рис. 4. Динамика финансирования образования в ПФО за период 2013–2023 гг.

Анализ представленных данных выявляет значительную дифференциацию регионов по исследуемому параметру: наивысшие показатели зафиксированы в УР и Пермском крае со значением показателя 1, тогда как Республика Мордовия и Саратовская область имеют устойчиво низкие значения (значения показателя стабильно меньше 0,6).

Далее следует рассмотреть динамику финансирования науки в ПФО. Это показатель J_2 . Республика Марий Эл на протяжении всего периода исследования демонстрирует стабильно низкие значения (среднее значение показателя составляет 0,018). УР занимает промежуточную позицию (9-е место, среднее значение 0,084). Наибольший уровень финансирования зафиксирован в Нижегородской области, равное 1, что указывает на существенные различия между регионами по объему финансовых вложений.

Рассмотрим показатель доли преподавательского состава L_3 . Динамика для ПФО за период с 2013 по 2023 г. представлена информация на рис. 5.

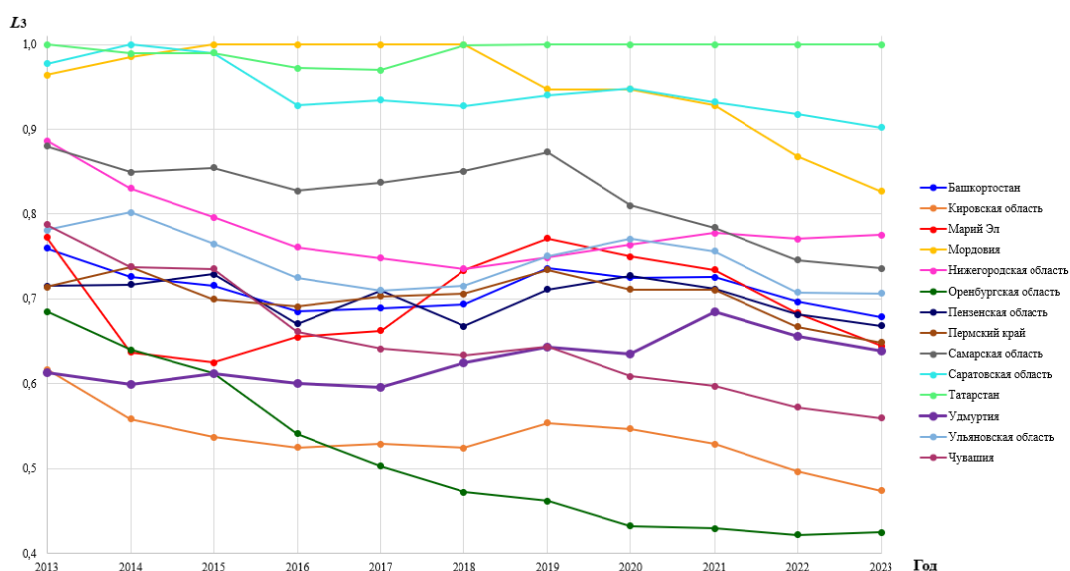


Рис. 5. Динамика доли профессорско-преподавательского состава в ПФО за период 2010–2021 гг.

Согласно полученным данным, УР демонстрирует показатели, соответствующие предпоследней позиции в рейтинге, в то время как Кировская область характеризуется минимальными значениями данного показателя (среднее значение составляет 0,535). Напротив, наибольшая доля ППС наблюдается в Ульяновской области и Республике Мордовия – 0,744 и 0,952, что свидетельствует об их лидерстве по данному параметру.

Рассмотрим показатель доли сотрудников, занятых научными исследованиями и разработками J_3 в ПФО. Анализ данных показывает значительные межрегиональные различия: Нижегородская область лидирует, Удмуртия занимает низкую позицию (11-е место, среднее значение равно 0,093), а Республика Марий Эл демонстрирует наименьшие значения (среднее значение составляет 0,025).

Теперь имеем возможность рассчитать интеллектуальный потенциал населения по формуле (1) для ПФО за период 2013–2023 гг. График динамики индекса IP при равных весовых коэффициентах представлен на рис. 6.

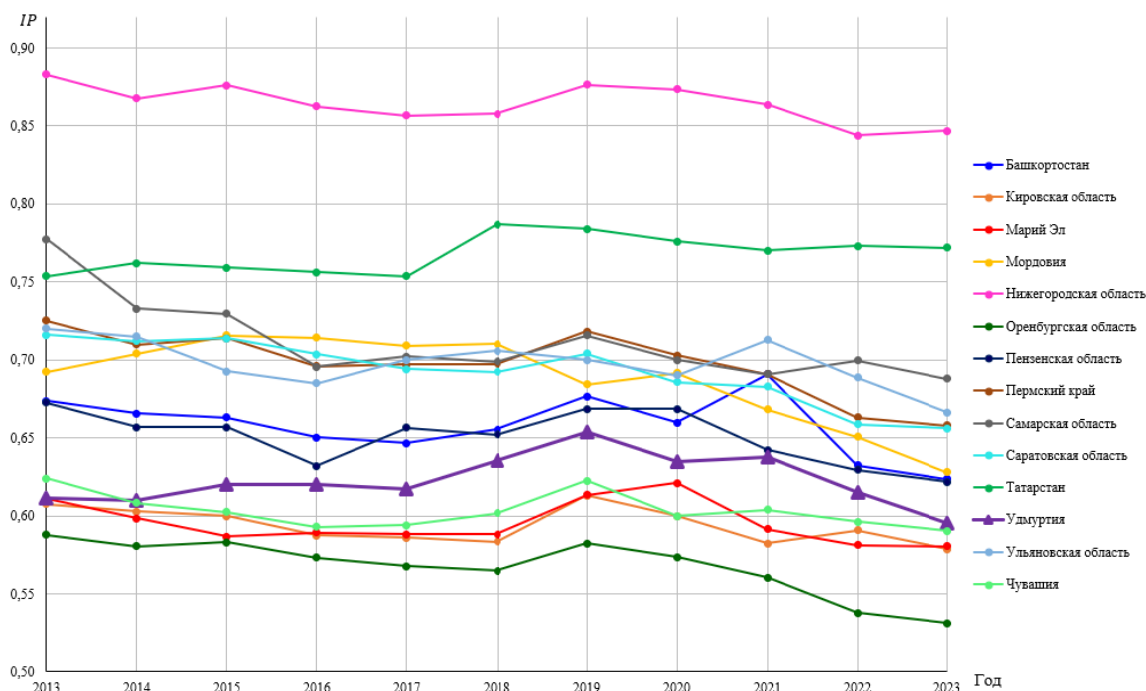


Рис. 6. Динамика интеллектуального потенциала населения УР в период за 2013–2023 гг.

На рис. 7 представлено среднее значение интеллектуального потенциала для всего населения ПФО за изучаемый период.

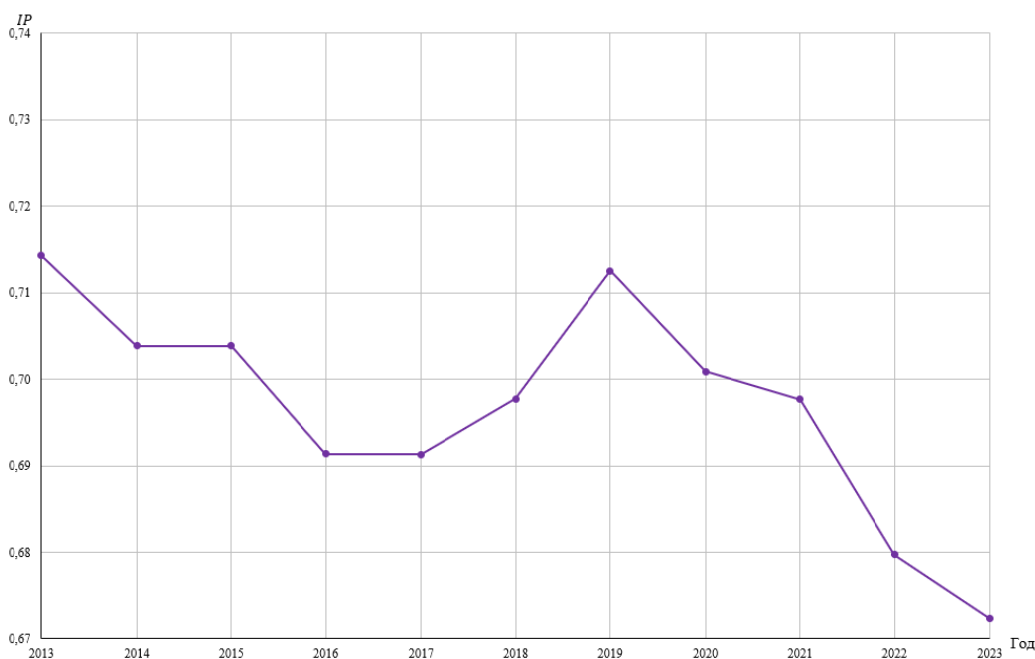


Рис. 7. Динамика среднего значения интеллектуального потенциала населения ПФО в период 2013–2023 гг.

Анализ динамики интеллектуального потенциала населения ПФО за период 2013–2023 годы выявил следующие закономерности:

1. Региональная дифференциация:

- Максимальные значения показателя характерны для Нижегородской области;
- Минимальные показатели зафиксированы в Оренбургской области;
- Удмуртская Республика занимает 10-ю позицию в региональном рейтинге.

2. Общая тенденция:

- Зафиксировано незначительное снижение показателя интеллектуального потенциала (на 0,02 или 2,4%);
- Среднее значение по округу демонстрирует отрицательную динамику за исследуемый период;
- Значение среднего интеллектуального потенциала варьируется от 0,672 до 0,714.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанная система показателей позволяет проводить сравнительный анализ интеллектуального потенциала населения на межрегиональном уровне и выявлять долгосрочные тенденции развития человеческого капитала, что расширяет возможности для мониторинга и оценки эффективности образовательных и социально-экономических программ.

Список литературы

1. Коваленко, В. И. Карл Маркс о науке как производительной силе общества: политологический анализ // Международный форум «Маркс – XXI» (200-летию Карла Маркса посвящается). – 2018. – URL:<http://conf.msu.ru/rus/event/sandbox/add>.
2. Вавилова, Д. Д. Нейросетевая модель прогнозирования человеческого капитала // Интеллектуальные системы в производстве. – 2020. – Т. 18, № 1. – С. 26–35. – DOI: 10.22213/2410-9304-2020-1-26-35.
3. Ketova K. V. Modelling a human capital of an economic system with neural networks // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 012035. DOI: 10.1088/1742-6596/1703/1/012035.
4. Кетова, К. В. Об одной задаче макроэкономической динамики региона с учетом факторов экономического развития // Вестник Ижевского государственного технического университета. – 2007. – № 3 (35). – С. 33–40.
5. Леонтьев, Б. Б. Цена интеллекта. Интеллектуальный капитал в бизнесе. – Москва : Акционер, 2015. – 200 с.
6. Кетова, К. В. Экономико-математическая модель потенциала трудовых ресурсов и стоимостных характеристик демографических потерь // Прикладная эконометрика. – 2007. – № 3 (7). – С. 80–94.
7. Петров, В. М. Человеческие потенциалы и их распределения: проблема измерений // Человеческий потенциал: опыт комплексного подхода / под ред. И. Т. Фролова. – Москва, 2014. – 375 с.
8. Левашов, В. К. Интеллектуальный потенциал общества: социологическое измерение и прогнозирование // Мониторинг общественного мнения. – 2008. – № 3 (87). –

С. 17–30. – URL: https://wciom.ru/fileadmin/file/monitoring/2008/87/Levawev_Intellectyalnyy%20potencial%20obwestva_s17-30.pdf.

9. *Вавилова, Д. Д.* Структурно-динамический анализ составляющей здоровья человеческого капитала социально-экономической системы // Статистика и Экономика. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 54–66. – DOI: 10.21686/2500-3925-2021-1-54-66.

10. *Малапура, Р. В.* Методика измерения уровня интеллектуального потенциала страны // Международный экономический форум, 2012. – URL: <https://be5.biz/ekonomika1/r2012/3635.htm>.

11. Информационный сайт Госкомстата России. – URL: <http://www.gks.ru>.

12. Удмуртия в цифрах – Сборник за 2023 год // Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по УР – URL: <https://18.rosstat.gov.ru/folder/33803>.

О некоторых подходах математического моделирования учебного процесса

К. М. Никитина

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Рассмотрены математические модели учебного процесса, включая детерминированные, вероятностные и статистические подходы, с целью оптимизации образовательной деятельности. Представлены методы анализа и прогнозирования успеваемости, а также результаты программной реализации модели для оценки влияния различных факторов на обучение.

Ключевые слова: математическое моделирование, учебный процесс, модели учебного процесса.

Введение

Современные вызовы образовательных систем, обусловленные динамикой технологического прогресса и возрастающими требованиями к персонализации обучения, актуализируют необходимость применения точных методов анализа педагогических процессов. Математическое моделирование является сложным аппаратом для выявления скрытых закономерностей и прогнозирования результатов учебной деятельности. Однако не все существующие модели могут быть точными для прогнозирования успеваемости в условиях реального образовательного процесса. В работе были рассмотрены существующие виды моделей учебного процесса, их применение в реальных условиях и адаптация к различным образовательным контекстам для понимания динамики и точного прогнозирования успехов студентов [1].

Целью работы является построение двух различных математических моделей учебного процесса, адекватно отражающих их природу и вариативность, с последующей реализацией в виде прогностической системы успеваемости студентов.

Математическое моделирование, математическая модель

Решение проблем управления качеством образовательного процесса возможно в случае применения математического моделирования, в том числе построения математических моделей образовательного процесса.

Математическая модель – это совокупность записанных на языке математики соотношений, определяющих характеристики состояния объекта в зависимости от его элементов, свойств, параметров, внешних воздействий. Математическое моделирование позволяет точно фиксировать структурные изменения любой системы и отражать их в количественной форме.

Математическое моделирование – процесс построения и изучения математических моделей.

Обобщенный алгоритм применения методов математического моделирования в обучении включает следующие этапы:

- построение модели элементов образовательного процесса;
- экспериментирование с моделью;
- интерпретация полученных результатов.

Виды моделей учебного процесса

Для понимания наиболее эффективной модели учебного процесса были рассмотрены виды возможных моделей [2].

1. Детерминированные модели – подходят для описания процессов с четкими правилами и предсказуемыми результатами.

– Линейная модель обучения – усвоение знаний как последовательное продвижение по темам.

– Модель «вход-выход» – студент получает знания (вход), обрабатывает их и демонстрирует на выходе (экзамены, зачеты).

2. Вероятностные и статистические модели – позволяют учитывать случайные факторы (например, пропуски занятий, разный уровень подготовки).

– Марковские модели – переход студента между состояниями (например, «не знает тему» → «знает тему» с определенной вероятностью).

– Регрессионные модели – прогнозирование успеваемости на основе факторов (посещаемость, активность и т. д.).

3. Агентно-ориентированные модели – позволяют смоделировать взаимодействие студентов и преподавателей как автономных агентов с собственными стратегиями.

– Модель индивидуального обучения – агент-студент адаптируется под стиль преподавания.

– Модель группового взаимодействия – как студенты влияют друг на друга (например, работа в команде).

4. Динамические системы и системная динамика – рассматривают учебный процесс как систему с обратными связями.

– Модель Бассейна-Стоков – накопление знаний, влияние нагрузки на успеваемость.

– Петли обратной связи – как оценка преподавателя влияет на мотивацию студента.

5. Имитационное моделирование – позволяет смоделировать учебный процесс как последовательность событий (лекции, семинары, экзамены).

– Очереди в системе – как студенты «обрабатываются» преподавателем (например, время проверки работ).

6. Когнитивные и педагогические модели – основаны на теориях обучения.

– Модель Блума (таксономия образовательных целей) – как студент переходит от запоминания к анализу и творчеству.

– Модель Колба – обучение через опыт, рефлекссию и применение.

7. Гибридные модели – комбинация нескольких подходов (например, агентное моделирование + системная динамика).

Вероятностные и статистические модели

Рассмотрим более подробно одну из видов моделей.

Вероятностная модель описывает переход студентов между состояниями знаний с заданными вероятностями [3]. Введем состояния:

S_1 : "Не знает тему",

S_2 : "Знает тему".

Далее зададим матрицу переходных вероятностей P :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

где $p_{12} = 1 - p_{11}$ – вероятность выучить тему за шаг; $p_{21} = 1 - p_{22}$ – вероятность забыть тему.

Динамика системы будет выглядеть следующим образом. Если $\pi(t) = [\pi_1(t), \pi_2(t)]$ – распределение студентов по состояниям на шаге t , то:

$$\pi(t+1) = \pi(t) \cdot P.$$

Статистическая модель

Статистическая модель представлена в виде регрессионной модели успеваемости.

Успеваемость студента зависит от предикторов x_1, x_2, \dots, x_k (посещаемость, активность и др.), тогда уравнение можно записать в виде:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \xi,$$

где β_i – коэффициенты регрессии; $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ – случайная ошибка.

Для понимания насколько эффективно и правильно работает модель, рассмотрим оценку коэффициентов. Метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратов ошибок:

$$\min \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{1i} - \beta_2 x_{2i})^2.$$

Детерминированные модели

Рассмотрим более сложную детерминированную модель, динамическую с элементами сетевого взаимодействия. Есть N обучающихся объектов, с начальным рейтингом (уровень знания) – N -мерный вектор. Далее есть параметры: вектор эффективности обучения каждого объекта, вектор количества средств, затраченных на обучение (будь то деньги, процент приложенных усилий и т. д.), матрица взаимодействия объектов $N \times N$ (если рассматривать совместное обучение, на некоторые объекты будет положительное влияние, на некоторые – отрицательное или нейтральное) и одно число – полный период обучения для всех объектов.

Пусть в рассмотрении учувствуют n студентов с начальным рейтингом (уровнем знания).

Запишем R_0 в виде вектора-столбца, где каждый элемент представляет начальный рейтинг знаний $r_{(i,0)}$ для i -го студента [4].

$$R_0 = (r(1,0), r(2,0), \dots, r(N,0))^T.$$

Здесь $r_{(i,0)}$ – это начальный рейтинг знаний i -го студента.

Далее приведем векторы параметров, которые необходимы нам для анализа данной модели.

Эффективность обучения:

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T.$$

Параметр e_i отражает эффективность образовательных технологий, применяемых для i -го студента.

Затраты на обучение:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T, c_i \geq 0.$$

Здесь c_i – это затраты на обучение i -го студента.

Матрица взаимодействия между студентами:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $w_{i,j}$ показывают степень влияния j -го студента на i -го студента.

Условие матрицы влияния:

$$\sum_{j=1}^N |w_{i,j}| \leq 1.$$

Обновление рейтинга знаний.

На каждом временном шаге t обновление рейтинга знаний студентов описывается следующей формулой:

$$R(t+1) = R(t) + k \cdot f(E, C, W, R(t)),$$

где k – настраиваемый коэффициент, определяющий величину изменения рейтинга в зависимости от эффективности обучения и затрат.

Ограничение на рейтинг знаний. Значения не могут быть отрицательными и превышать 100 % усвоения:

$$r_{i,t+1} = \min(\max(r_{i,t} + \Delta r_i, 0), 100).$$

Функция f определяется как:

$$f(E, C, W, R) = (e_1 c_1 + I_1, e_2 c_2 + I_2, \dots, e_N c_N + I_N)^T,$$

где

$$I_i = \sum_{j=1}^N w_{(i,j)} r_j(t)$$

– это влияние других студентов на i -го студента. Этот компонент учитывает взаимное влияние студентов на их успехи в обучении.

Теперь подставим значение функции в формулу:

$$R(t+1) = R(t) + k \cdot (e_1 c_1 + I_1, e_2 c_2 + I_2, \dots, e_N c_N + I_N)^T.$$

Таким образом, для каждого студента мы вычисляем новое значение рейтинга, добавляя к текущему рейтингу результат, полученный из произведения уровня знаний и оценки, а также дополнительных факторов.

Программирование модели

Для анализа результатов поставленной задачи создадим класс Learning Model [5].

Начальные данные:

Начальные рейтинги студентов [88; 78; 64; 92; 57]

Вектор эффективности: [1.099; 0.656; 0.656; 0.558; 1.365]

Вектор затрат: [13; 17; 12; 11; 21]

Матрица взаимодействия:

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.0499 & 0.0492 & 0.0117 & 0.0111 \\ -0.0492 & 0 & 0.002 & -0.01 & -0.0453 \\ 0.0473 & -0.0267 & 0 & 0.1183 & -0.0117 \\ 0.0483 & -0.0033 & 0.0359 & 0 & -0.0049 \\ -0.0486 & 0.0442 & 0.0063 & -0.0114 & 0 \end{pmatrix}$$

Общее количество периодов: 10

Параметр регуляризации: 0.2

Объекты имеют начальные рейтинги, и в течение 10 периодов их рейтинги обновляются на основе заданных параметров (эффективности, затрат и взаимодействия). Таким образом получаем следующую визуализацию, представленную на рис. 1.

Матрица взаимодействия определяет, как рейтинги одного студента влияют на других. Если значения в этой матрице слишком велики, это может привести к следующему.

Чрезмерное влияние. Один студент может значительно повлиять на рейтинг другого, что вызывает резкие изменения. Построим корреляционную матрицу для нашей задачи, представленную на рис. 2.

В данном случае корреляционная матрица показывает, как разные переменные (в данном случае начальные рейтинги, векторы эффективности и векторы затрат) связаны друг с другом. Значения корреляции варьируются от -1 до 1 :

1 означает полную положительную корреляцию.

-1 означает полную отрицательную корреляцию.

0 означает отсутствие корреляции.

Initial ratings: [88. 78. 64. 92. 57.]
 Final ratings after 10 periods: [55.71221115 15.48282106 32.77377372 34.27053028 87.60050636]
 Average rating: 45.17
 Standard Deviation of ratings: 24.76
 Maximum rating: 87.60
 Minimum rating: 15.48

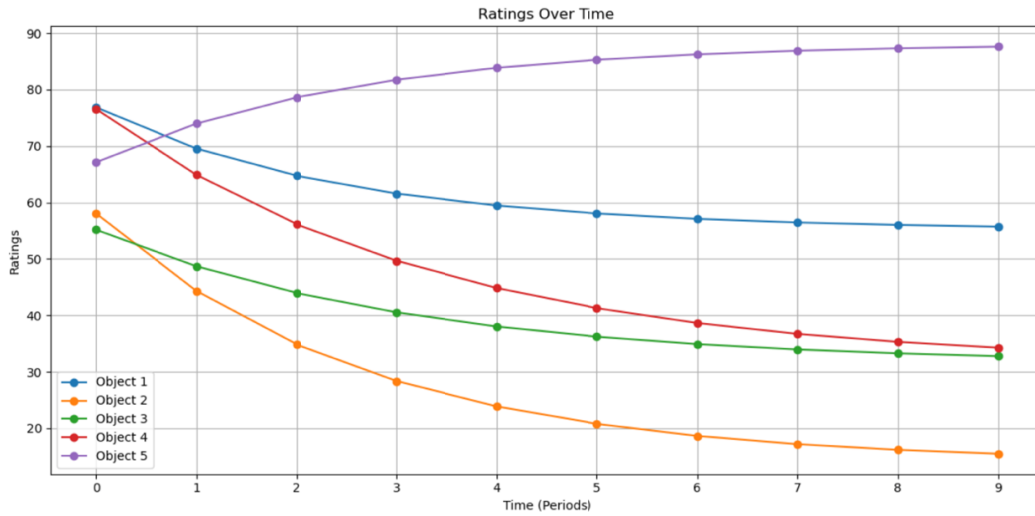


Рис. 1. График изменения рейтингов в течение 10 периодов

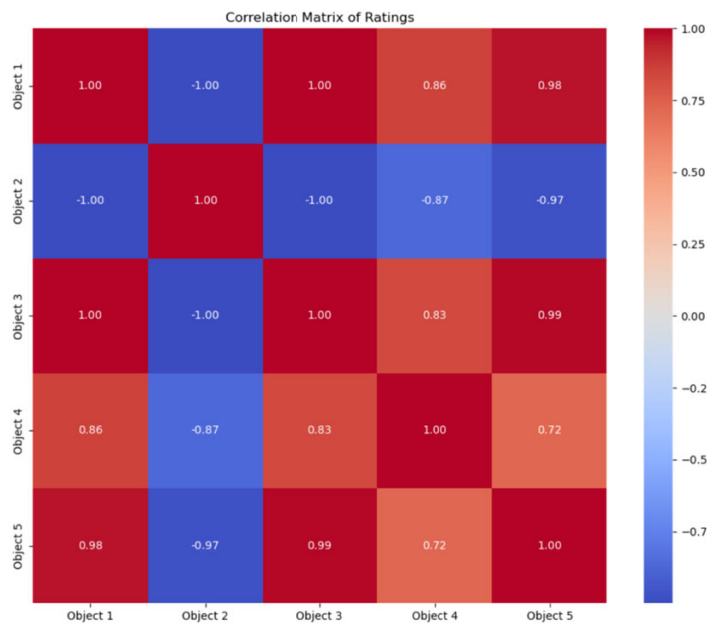


Рис. 2. Корреляционная матрица модели

Построим гистограммы распределения частот рейтингов, представленного на рис. 3.

Графики распределения показывают, насколько часто встречаются различные значения рейтингов для каждого объекта.

Analysis of Object 1: Mean: 61.55, Std Dev: 6.60, Skewness: 1.27

Analysis of Object 2: Mean: 27.78, Std Dev: 13.37, Skewness: 1.22

Analysis of Object 3: Mean: 39.75, Std Dev: 7.07, Skewness: 1.12

Analysis of Object 4: Mean: 47.83, Std Dev: 13.38, Skewness: 1.07

Analysis of Object 5: Mean: 81.86, Std Dev: 6.43, Skewness: -1.26

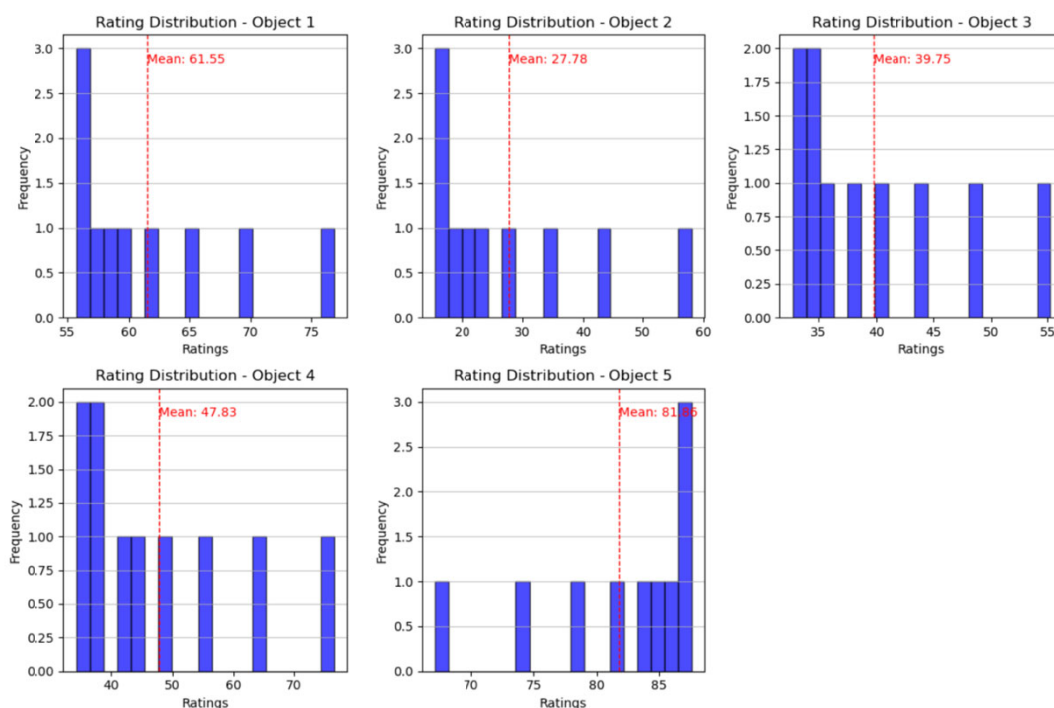


Рис. 3. Гистограммы распределения частот рейтингов

Сравнение полученных метрик показало, что объекты с более высокой эффективностью обучения, как правило, достигают более высоких рейтингов. Построим график эффективности и стоимости, представленный на рис. 4.

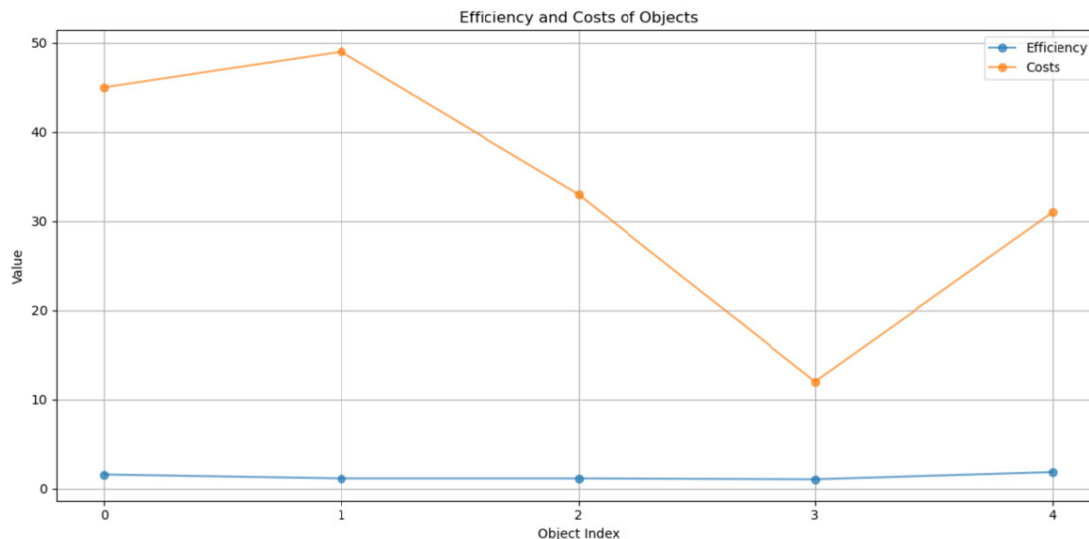


Рис. 4. График эффективности и стоимости

Затраты на обучение никак не влияют на эффективность студентов.

Заключение

Проведено комплексное исследование математических моделей учебного процесса, подробно были рассмотрены вероятностные и статистические модели. Основное внимание уделено анализу влияния таких факторов, как эффективность обучения, затраты ресурсов и взаимодействие между студентами, на

их успеваемость. Результаты программной реализации модели демонстрируют, что объекты с высокой эффективностью обучения достигают более высоких рейтингов, а также подтверждают важность учета взаимного влияния студентов в образовательном процессе.

Список литературы

1. *Кузьмин, О. В.* Математические методы в педагогике и психологии образования / О. В. Кузьмин, Н. Е. Кузьмина. – Москва : Академия, 2018. – 433 с.
2. *Беляев, А. И.* Математическое моделирование: теоретические основы и практические приложения. – Москва : Наука, 2010. – С. 310–320.
3. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва : Высш. шк., 2017. – 342 с.
4. *Робертс, Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социально биологическим и экологическим задачам. – Москва : Наука, 1986. – С. 289–290.
5. *Григорьев, В. П.* Использование Jupyter Notebook для анализа образовательных данных / В. П. Григорьев, Л. В. Кузнецова. – Москва : Наука, 2021. – С. 23–34.

Экспертный анализ влияния качества расходных материалов на долговечность принтеров

М. А. Тимошкина

Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Представлены результаты экспертного анализа влияния качества расходных материалов на долговечность и производительность лазерных принтеров. Исследование основано на данных опроса специалистов сервисного центра, обладающих значительным опытом работы с печатающим оборудованием. Рассмотрены ключевые параметры тонера, наиболее уязвимые детали принтеров, а также даны рекомендации по выбору расходных материалов. Уделено внимание методам экспертных оценок, основанным на анкетировании. Результаты исследования могут быть полезны для пользователей сервисных центров при выборе тонера и обслуживании принтеров.

Ключевые слова: экспертный анализ, метод экспертных оценок, анкетирование, качество тонера, лазерные принтеры.

Введение

Лазерные принтеры широко используются в офисах, образовательных учреждениях и в домашних условиях. Качество печати и долговечность оборудования во многом зависят от характеристик расходных материалов, в частности тонера. Однако на рынке представлено множество тонеров различных производителей, отличающихся по цене, составу и заявленным характеристикам. Отсутствие объективной информации о качестве тонеров затрудняет выбор оптимального варианта и может привести к преждевременному выходу из строя принтеров или снижению качества печати.

Целью данной работы является проведение экспертного анализа влияния качества тонера на работу принтеров. Для этого был использован метод экспертных оценок, использующий анкетирование. Полученные результаты исследования позволяют определить ключевые параметры тонера, влияющие на долговечность оборудования, и разработать практические рекомендации для пользователей.

Экспертный анализ, эксперт, метод экспертизы

Экспертный анализ представляет собой метод оценки, основанный на использовании опыта, знаний и интуиции специалистов в определенной области. Этот метод применяется в тех случаях, когда использование более объективных методов, таких как математические или статистические, невозможно или затруднительно. Экспертный анализ позволяет учитывать как количественные, так и качественные факторы, что делает его особенно ценным в условиях неопределенности или при отсутствии достаточного объема данных [1].

Под экспертом (от англ. «expert» – специалист) понимается узкоспециализированный профессионал, обладающий глубокими знаниями, опытом и навыками в своей сфере деятельности. Эксперт способен проводить всесторонний анализ ситуации, выявлять ключевые проблемы и предлагать эффективные решения. В рамках экспертного анализа специалисты выполняют информационную и аналитическую работу, включая формирование объектов, оценку их характеристик, а также прогнозирование возможных событий и явлений [2].

Методы экспертных оценок представляют собой совокупность логических и математических процедур, направленных на получение, обработку и анализ информации, предоставленной экспертами. Эти методы широко применяются в различных сферах, включая научно-технические исследования, экономическое прогнозирование, управление производством, а также в образовании, медицине и других отраслях. Основная цель экспертных оценок – подготовка и выработка рациональных решений на основе обобщенного мнения группы специалистов [3].

Среди методов экспертных оценок можно выделить метод анкетирования, интервью и метод Дельфи [4]. Далее рассматривается экспертиза, основанная на методе анкетирования.

Метод анкетирования

Разработка анкеты для экспертного опроса проводилась с учетом специфики исследования и требований к получаемым данным. Структура анкеты обеспечивает сбор максимально полной и объективной информации о влиянии различных расходных материалов (тонера) на работу принтеров. Анкета состоит из семи тематических блоков, направленных на изучение конкретного аспекта проблемы. Такой подход позволяет систематизировать получаемые данные и обеспечить их последующую эффективную обработку.

Первый блок анкеты посвящен сбору общей информации об эксперте.

Вопросы второго блока анкеты сфокусированы на оценке влияния качества тонера на работу принтера. Вопросы этого раздела направлены на выявление общего отношения экспертов к проблеме, а также на получение конкретных данных о наиболее критичных параметрах тонера и узлах принтера, наиболее подверженных износу.

Третий блок анкеты посвящен характеристикам тонера и предпочтениям экспертов в выборе расходных материалов.

Вопросы четвертого блока содержат информацию о конкретных проблемах, связанных с использованием тонера. Формулировка вопросов в этом разделе основана на анализе типичных неисправностей принтеров, что позволяет получить структурированные данные о взаимосвязи качества тонера и конкретных технических проблем.

Пятый блок анкеты включает вопросы прогнозного характера, позволяющие оценить ожидания экспертов относительно вероятностей поломок и перспектив использования различных типов тонера.

Шестой блок содержит дополнительные вопросы, которые позволяют уточнить позицию экспертов по некоторым спорным моментам. Вопрос

о завышении требований производителей помогает выявить возможные расхождения между официальными рекомендациями и практическим опытом специалистов. Вопрос об оптимальном сроке службы тонера дает важную информацию для разработки рекомендаций по периодичности замены расходных материалов.

Заключительный блок анкеты предоставляет экспертам возможность высказать свои дополнительные замечания и комментарии, что позволяет учесть аспекты проблемы, которые не были охвачены структурированными вопросами.

Результаты исследования

Основу исследования составили данные, полученные от 10 экспертов с различным стажем работы в области обслуживания печатающей техники. Каждый эксперт оценивал параметры тонера по следующим критериям: важность компонентов тонера, частота возникающих проблем, степень влияния на качество печати, рекомендации по выбору расходных материалов, явно или неявно содержащихся в вопросах анкеты.

Для формализации экспертных оценок применялись следующие методы.

1. Ранжирование и расчет коэффициентов весомости

Ранжирование состоит в расстановке n объектов экспертизы в порядке их предпочтения по важности и весомости. Место R_{ij} , занятое при расстановке, называется рангом i -го объекта, определенного j -м экспертом из m экспертов. Чем выше ранг при ранжировании, тем предпочтительнее объект, весомее, важнее показатель.

Коэффициенты весомости объектов экспертизы рассчитываются по формуле:

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^m R_{ij}}{\sum_{i=1, j=1}^{n, m} R_{ij}}, \quad 0 < q_i \leq 1.$$

Они показывают значимость экспертизы (например, значимость показателя в общей оценке качества продукции). Чем ближе q_i к 1, тем показатель более значим, весомей и наоборот [1].

2. Определение коэффициента конкордации Кендалла

Согласованность мнений экспертов определяется через коэффициент конкордации W Кендалла:

$$W = \frac{12 \cdot S}{(m^2 \cdot (n^3 - n))}, \quad 0 < W \leq 1,$$

где S – сумма квадратов отклонений суммы рангов каждого объекта экспертизы от среднего арифметического рангов; m – число экспертов; n – число объектов экспертизы. Чем ближе W к 1, тем выше согласованность мнений экспертов, и наоборот [1].

3. Статистическая проверка значимости результатов

Анализ коэффициентов весомости параметров тонера (табл. 1) выявил четкую иерархию значимости параметров тонера. Наибольший вес (0,52)

получили магнитные свойства, что свидетельствует об их определяющем влиянии на работу печатающих узлов. Это подтверждается и экспертными оценками, согласно которым проблемы с блоком термофиксации (одним из наиболее уязвимых элементов) напрямую связаны с качеством магнитного вала (табл. 2).

Таблица 1. Коэффициенты весомости параметров тонера

Параметр тонера	Коэффициент весомости	Интерпретация
Магнитные свойства	0,52	Наиболее значимый параметр
Размер частиц	0,29	Второй по важности параметр
Материал пластиковой оболочки	0,19	Наименее значимый из рассматриваемых

Таблица 2. Коэффициенты весомости уязвимых частей принтера

Уязвимая часть принтера	Коэффициент весомости	Интерпретация
Фотобарабан	0,38	Наиболее значимый параметр
Блок термофиксации	0,31	Второй по важности параметр
Ролик переноса	0,19	Третий по важности параметр
Узел подачи бумаги	0,08	Четвертый по важности параметр
Картриджный механизм	0,04	Наименее значимый из рассматриваемых

Результаты расчета коэффициента конкордации (табл. 3) демонстрируют высокую степень согласованности мнений экспертов ($W = 0,672$) в оценке влияния тонера на качество печати. Для проверки статистической значимости полученного коэффициента конкордации был применен хи-квадрат-тест. Вычисленное значение хи-квадрат (χ^2) преобразуется в р-значение. Полученное р-значение, равное 0,003, указывает на статистически значимую согласованность экспертных оценок ($p < 0.05$). Это подтверждает достоверность полученных результатов и позволяет сделать следующие выводы:

1. Использование некачественного тонера действительно сокращает срок службы принтера.
2. Магнитные свойства являются критически важным параметром.
3. Размер частиц оказывает существенное, но менее значимое влияние.

Таблица 3. Результаты расчета коэффициента конкордации

Оцениваемый параметр	Коэффициент конкордации	Интерпретация
Влияние на печать	0.672	Высокая согласованность мнений

Заключение

В рамках исследования был проведен комплексный анализ экспертных оценок, направленный на выявление ключевых параметров тонера, оказывающих наибольшее влияние на долговечность печатающих устройств. Для обработки данных использовался метод экспертных оценок с расчетом коэффициентов весомости и конкордации, что позволило получить статистически значимые результаты.

Проведенное исследование позволяет сформулировать конкретные рекомендации по выбору тонера:

- приоритет следует отдавать оригинальным расходным материалам;
- особое внимание необходимо уделять магнитным свойствам тонера;
- регулярная профилактика печки может существенно продлить срок службы устройства.

Список литературы

1. *Бабкина, Н. А.* Метод экспертных оценок : учеб.-метод. пособие. – Благовещенск, Изд-во АмГУ. 2005. – 18 с.
2. *Орлов, А. И.* Организационно-экономическое моделирование. В 3 ч. Ч. 2 : Экспертные оценки. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 486 с.
3. Экспертные оценки: Методология и практика применения / И. П. Артюхов и др. // *Фундаментальные исследования*, 2012. – С. 11–15.
4. *Прохоров, Ю. К.* Управленческие решения : учеб. пособие / Ю. К. Прохоров, В. В. Фролов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : СПбГУ ИТМО, 2011. – 138 с.

Сведения об авторах

Алексеев Виталий Юрьевич, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), stalker.alekseev2009@mail.ru

Ананикова Анастасия Гавриловна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), anastasiya-ananikova@yandex.ru

Аймурзин Никита Иршатович, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), aimurzin2001@gmail.com

Бондарев Филипп Сергеевич, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), mr.fil414@gmail.com

Вавилова Дайана Дамировна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), daiana1604@yandex.ru

Валеев Тимур Ринатович, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), timur.121valeev@gmail.com

Васильева Ирина Васильевна, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), irina-udm@yandex.ru

Ватолкин Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), vtu6886@gmail.com

Виноградов Фёдор Андреевич, аспирант, младший научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), f.vinog3@gmail.com

Гарипов Дамир Тимурович, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), damwary@gmail.com

Давлетишина Ксения Марселевна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), cass_1337@mail.ru

Дементьев Вячеслав Борисович, доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, директор Института механики Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), заведующий кафедрой «Технологии производства систем вооружения» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), demen@udman.ru

Дизендорф Константин Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), dki@istu.ru

Дюндик Максим Евгеньевич, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), max.dyundik2002@gmail.com

Ефимов Максим Юрьевич, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), maks.tornado.03@gmail.com

Жиделева Анастасия Алексеевна, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), nastya.zhideleva.01@mail.ru

Загребина Анастасия Артемовна, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), zagrebina_nastya@bk.ru

Зерари Раян, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), rayane.zerari20@gmail.com

Ицков Александр Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), itscov@uni.udm.ru

Карсканов Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), ser@udman.ru

Кетова Каролина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), ketova_k@mail.ru

Клюкин Даниил Анатольевич, аспирант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), anatoliikljukin@mail.ru

Корепанова Алла Вячеславовна, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), solnishko_al@mail.ru

Корляков Сергей Владимирович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Механика» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), sergkor2005@istu.ru

Королев Станислав Анатольевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), stkj@mail.ru

Красноперов Илья Николаевич, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), krasnop1001@mail.ru

Кузнецов Николай Павлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), tmitmm-kuznetsov@istu.ru

Кузьмин Михаил Степанович, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), kuzmin.mikhail68@mail.ru

Липанов Алексей Матвеевич, доктор технических наук, профессор, академик РАН, академик РАН, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (г. Москва), профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), aml35@yandex.ru

Лужбин Константин Денисович, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), kostaluzbin@gmail.com

Львова Елизавета Юрьевна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), lvovaeliza@yandex.ru

Майков Дмитрий Николаевич, ведущий специалист ООО «Сиам Мастер», младший научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), dimaMS2@mail.ru

Макаров Сергей Сергеевич, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), профессор кафедры «Тепловые двигатели и установки» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), ssmak15@mail.ru

Мансуров Рустам Ренатович, аспирант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), otum@bk.ru

Мусина Алия Ильдаровна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), a_m90210@mail.ru

Нефедов Денис Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), Denisnefedov1@yandex.ru

Никитина Кристина Михайловна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), krista.nika@gmail.com

Перескокова Елизавета Алексеевна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), liveta.lin@gmail.com

Подлесных Иван Романович, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), ggwpivan230903@gmail.com

Русяк Иван Григорьевич, доктор технических наук, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), primat@istu.ru

Рылов Даниил Алексеевич, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), daril31@mail.ru

Саломатина Анастасия Юрьевна, аспирант Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), старший преподаватель кафедры «Нанотехнологии и микросистемная техника» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), salomatinaau@yandex.ru

Селетков Сергей Григорьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), s.g.seletkov@gmail.com

Старков Кирилл Степанович, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), kirillstarkov15@gmail.com

Суфиянов Вадим Гарайханович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), vsufiy@istu.ru

Телицина Екатерина Дмитриевна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), telitsinak@mail.ru

Тенев Валентин Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), v.tenenev@gmail.com

Тимошкина Мария Александровна, студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), timoshamarishkina@mail.ru

Трефилов Даниил Алексеевич, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), trefilov.2002@inbox.ru

Тукмачев Никита Александрович, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), tuch3611@gmail.com

Федотов Алексей Юрьевич, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения РАН (г. Ижевск), заведующий кафедрой «Нанотехнологии и микросистемная техника» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), alezfed@gmail.com

Федорычев Егор Андреевич, магистрант кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), egorfedorycev@mail.ru

Шадрин Вадим Феликсович, студент кафедры «Мехатронные системы» Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова (г. Ижевск), Shadrinvadim06@gmail.com

Электронное научное издание

IV ЛИПАНОВСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

Материалы региональной школы-семинара молодых ученых, аспирантов и студентов
«Высокопроизводительные вычисления, визуальные технологии
и математическое моделирование задач механики, баллистики и управления
техническими и социально-экономическими системами»

(Ижевск, 16–17 июня 2025 г.)

Адрес в информационно-телекоммуникационной сети:
https://lipanovskie-chteniya.istu.ru/files/Липановские_чтения_2025.pdf

Дата размещения на сайте: 10.03.2026

Технический редактор *С. В. Логинова*
Корректор *М. А. Ложкина*
Верстка *С. В. Петуховой*

Подписано к использованию 10.03.2026.
Объем 20,34 МБ. Уч.-изд. л. 12,88. Заказ № 254

Издательство управления информационных ресурсов
Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова
426069, Ижевск, Студенческая, 7